Pożytki z przestrzeni BV, semestr letni 2016/17 – seria 3. zadań

20 marca 2017

Zadanie 1. Niech μ, μ_k będą miarami Radona na $\mathbb{R}^n$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

i. $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ w $M(\mathbb{R}^n)$;

ii. $\liminf \mu_k(U) \geq \mu(U)$ dla każdego otwartego $U \subset \mathbb{R}^n$ oraz $\limsup \mu_k(K) \leq \mu(K)$ dla każdego zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$;

iii. $\lim \mu_k(B) = \mu(B)$ dla każdego borelowskiego $B \subset \mathbb{R}^n$ takiego, że $\mu(\partial B) = 0$.

Zadanie 2. Przypuśćmy, że $\mu \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. Niech (ϱ_ε) będzie standardowym przybliżeniem jedności. Wykaż, że

i. $\mu * \varrho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ oraz $\nabla^\alpha(\mu * \varrho_\varepsilon) = \mu * \nabla^\alpha \varrho_\varepsilon$ dla dowolnego wielowskaźnika α;

ii. $\mu * \varrho_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ w $M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ oraz $\int_E |\mu * \varrho_\varepsilon| \leq |\mu|(E_\varepsilon)$, gdzie $E \subset \mathbb{R}^n$ jest dowolnym zbiorem borelowskim, a $E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \operatorname{dist}(x, E) \leq \varepsilon\}$;

iii. $|\mu * \varrho_\varepsilon| \overset{*}{\rightharpoonup} |\mu|$ w $M(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 3. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem o skończonym obwodzie. Wykaż, że istnieje ciąg $A_k \subset \mathbb{R}^n$ zbiorów otwartych o gładkim brzegu taki, że $P(A_k) \to P(A)$ oraz A_k zbiega do A w mierze $\mathcal{L}^n$.