Analiza Matematyczna I.2, egzamin
6 września 2014, godz. 9:15 — 13:15

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia. **Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{x^2}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Czy istnieje $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?
Czy funkcja f jest jednostajnie ciągła na zbiorze $(-1,1) \setminus \{0\}$?
Znaleźć kresy funkcji f na przedziale $(-1,1)$.

---

2. Niech $f(x) = 2 - 2\cos x - x\sin(\sin x)$; $a_n = f(1/n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Zbadać, dla jakich wykładników $w > 0$ szereg $\sum\limits_{n=6092014}^{\infty} a_n^w$ jest zbieżny.

---

3. Zbadać, dla jakich $p > 0$ ciąg funkcji $f_n(x) = nx^p(x+1)^{-n}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,\infty)$.

---

4. Funkcja $f\colon [1,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest niemalejąca, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 1$. Udowodnić, że jeśli całka $\int_1^\infty \big(1 - f(x)\big)\,dx$ jest zbieżna, to również szereg $\sum\limits_{1}^{\infty} n\big(1 - f(n^2)\big)$ jest zbieżny. Wyjaśnić, czy ze zbieżności szeregu wynika też zbieżność całki.

---

5. Niech $f(x) = e^{x^2+e^{x^2}}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Dowieść, że dla dowolnych, różnych liczb $a, b > 0$ zachodzi nierówność

$$(b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

---

6. Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{4 + n^4x^4}$.