**Analiza Matematyczna I.2, egzamin**
**17 czerwca 2014, godz. 9:15 — 13:15**

*Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.*
**Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.
*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

**1**. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{dla } \ x \geq 0. \\ \cosh\sqrt{-x} & \text{dla } \ x < 0. \end{cases}$$

Dowieść, że funkcja $f$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

Obliczyć $\displaystyle\int_{-1}^{\pi^2/4} f(x)dx$.

*Przypomnienie*: $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

---

**2**. Niech $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+7} \frac{k^3}{n^4} e^{k^2/n^2}$. Rozstrzygnąć, czy ciąg $(S_n)$ ma granicę skończoną.

Znaleźć $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$, jeśli ta granica istnieje.

---

**3**. Zbadać, dla jakich wartości wykładnika $c \in \mathbb{R}$ całka niewłaściwa jest zbieżna:

$$\int_1^\infty \left(\frac{x}{\ln x}\right)^c \cdot \frac{dx}{1 + x^{4c}}.$$

---

**4**. Niech $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ dla tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ jest zbieżny. Obliczyć granicę jednostronną

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

---

**5**. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0+} \int_{\sin x}^{x} \frac{dt}{t^3(1 + \sqrt{t})}.$$

---

**6**. Załóżmy, że szereg $\sum f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $I$, a funkcje $f_n : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe i nieujemne. Udowodnij, że funkcja

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) e^{f_n(x)}$$

jest dobrze określona i ciągła na $I$.

---