Analiza Matematyczna I.2, kolokwium
15 maja 2014, 16:15 — 19:15

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

0. Promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest równy 2. Niech $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla każdego x z przedziału zbieżności szeregu. Czy wynika stąd, że
a. f jest jednostajnie ciągła na przedziale $(-1, 0]$?
b. f jest jednostajnie ciągła na przedziale $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$?
c. f'' jest ciągła na przedziale $(0, 2)$?
d. f' jest ograniczona na przedziale $(-2, 1]$?
e. istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$?

---

1. Funkcje f, g są trzykrotnie różniczkowalne w otoczeniu zera oraz spełniają warunki: $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 1$. Niech $h(x) = g(f(x)) - f(g(x))$. Obliczyć $h'''(0)$.

---

2. Obliczyć granicę prawostronną $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\sin x)^\alpha \cdot (x \ln(1+\sin^2 x) - \operatorname{tg} x + x\cos x)}{\exp(-x^2) - \sqrt{\cos 2x}}$ w zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

3. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana wzorem $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + 2^x}$.
Wykazać, że funkcja f jest ciągła.
Wyjaśnić, czy istnieje pochodna $f'(0)$.

---

4. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{nx^n}{n+1}$.
Wykazać, że funkcja $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{nx^n}{n+1}$, spełnia tożsamość

$$xf(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x),$$

w każdym punkcie przedziału zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{nx^n}{n+1}$.

---

5. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}{(1+\sin^2 x)\cos^2 x}\, dx$ w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

---

6. Niech $f_n(x) = n\left(\mathrm{e}^{(\sin x)/n} - \mathrm{e}^{(-\sin x)/n}\right)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
Czy ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$?
