Analiza Matematyczna I.2, kolokwium
27 marca 2014, 17:15 — 20:15

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Zadanie 0. Niech $f, g\colon (0,\infty) \longrightarrow$ będą funkcjami różniczkowalnymi przy czym dla każdego $x \in (0,\infty)$ spełniony jest warunek $g'(x) \neq 0 \neq g(x)$.
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$?
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 27$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$?
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$?
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$?
Czy z równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 27$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 27$?

Zadanie 1. Wyznaczyć stałe dodatnie A, B, C, dla których istnieje taka funkcja ciągła $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, że

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A\sqrt{x} - B}{x^2 - 4} & \text{dla } x > 2, \\[2ex] \dfrac{\ln(C\,x)}{x - 2} & \text{dla } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Zadanie 2. Wykazać, że dla każdych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $x - y > y \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{arctg}(x-y) + \left(\sqrt{3} - 1\right) \operatorname{arctg}(y) < \sqrt{3}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} y\right).$$

Zadanie 3. Funkcja f jest ciągła na przedziale $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right]$ i spełnia warunek

$$f\big(2\sqrt{2}\big) - f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 3.$$

Wykazać, że dla pewnej liczby x zachodzi równość $f(2x) - f(x) = 1$.

Zadanie 4. Niech $f(x) = 0$ gdy $x = 0$ lub gdy $x \notin \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = \frac{1}{q}$, gdy $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ oraz $\mathrm{NWD}(p,q) = 1$.
Rozstrzygnąć, czy istnieje $f'(0)$, a jeśli istnieje, znaleźć tę pochodną.

Zadanie 5. Niech $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}\ln(x+1)$.
Czy funkcja f jest jednostajnie ciągła?
Czy funkcja f spełnia warunek Lipschitza?

Zadanie 6. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ nierówność $e^{x+a} > (x-a)^2$ zachodzi dla każdego $x \in (0,\infty)$?
