Analiza Matematyczna I.1, kolokwium, 16 stycznia 2014, 16:15 — 19:15

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Zadanie 0. Podać obie definicje (Cauchy'ego i Heinego) granicy funkcji $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ w punkcie skupienia zbioru A.

Zadanie 1. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lfloor (n^3+n+1)/(3n^2-1) \rfloor} \cdot \frac{\ln n}{n}$.

Zadanie 2. Dany jest zbieżny szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Czy wynika stąd, że

a) szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny,

b) szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ jest bezwzględnie zbieżny?

Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

Zadanie 3 Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^\alpha 2^n}{n^\alpha 3^n + 2^n}$ w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Dane są stała $c \in \mathbb{R}$ i szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2c^2)^n}{n \ln n + \cos(n\pi)}$.

a) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ ten szereg jest zbieżny?

b) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ ten szereg jest bezwzględnie zbieżny?

Zadanie 5. Niech (a_n) będzie takim ciągiem liczb nieujemnych, że iloczyn Cauchy'ego szeregów $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ oraz $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Zadanie 6. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \{n!e\})^{n \ln n}$.

$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x.
