## AM1.1 — zadania domowe 9, termin 8 stycznia (piątek).

**1**. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}$.

**2**. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, tu $m, n \in \mathbb{N}$.

**3**. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{257}-257x+256}{x-1}$ i $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{257}-257x+256}{(x-1)^2}$.

**4**. Niech $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{dla} \quad x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad \mathrm{NWD}(p,q) = 1. \end{cases}$
Dla każdego $p \in \mathbb{R}$ znaleźć $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ lub wykazać, że funkcja $f$ granicy w punkcie $p$ nie ma. Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(p) = \lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p)$?

**5**. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie granicę 0, to istnieje taka liczba niewymierna $a$, że $f(a) = 0$.

## AM1.1 — zadania domowe 10, termin 12 stycznia (wtorek).

**1**. Dowieść, że nie istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego rzeczywistego $a$ zachodzi równość $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

**2**. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, to istnieje wtedy taka liczba $x_0 \in [a,\infty)$, że $f(x) \geq f(x_0)$ dla każdego $x \in [a,\infty)$.

**3**. Dowieść, że jeśli funkcja **różnowartościowa** $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux, to $f$ jest funkcją ciągłą.

**4**. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, nieograniczona z góry, nieograniczona z dołu, to przyjmuje każda wartość nieskończenie wiele razy.

**5**. Niech $f\colon [3,12] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że zachodzi równość $f(3) = f(12)$. Udowodnić, że dla pewnego $x \in [3,12]$ zachodzi równość $f(x) = f(2x)$.