AM1.1 — zadania domowe 8, termin 22 grudnia (wtorek).

Z kryterium ilorazowego d'Alemberta wynika łatwo, że każdy z szeregów $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}x^{2n+1}$ jest bezwzględnie zbieżny dla każdej liczby rzeczywistej x, a nawet dla każdej liczby zespolonej x. Możemy zdefiniować funkcje $\sin\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ i $\cos\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ wzorami $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ i $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$.
Definiujemy $\pi=\inf\{\alpha>0\colon\quad \cos\alpha=-1\}$. Zostanie udowodnione następujące twierdzenie: dla każdej liczby x zachodzą równości $\cos(x+\pi)=-\cos x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$.
Rozwiązując zadania z tej serii wolno korzystać jedynie z tych własności funkcji sinus i kosinus, które zostały już wykazane lub przynajmniej wymienione powyżej. W szczególności żadne własności liczby π*, w tym nierówność* $3{,}14<\pi<3{,}15$*, na razie nie zostały wykazane.*

1. Dowieść, że dla każdej liczby x zachodzi równość $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. Obliczyć $\cos\frac{\pi}{2}$.

2. Dowieść, że $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ i znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

3. Dowieść, że $\sin 3>0{,}09$.

Od tego momentu można korzystać z wzorów:

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ *oraz*
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

4. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ jest rozbieżny.

5. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ jest zbieżny dla każdej liczby x.