AM1.1 — zadania domowe 5, termin 27 listopada (piątek).

Przypomnienia:

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i $x_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n}$.

$\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \in (0,1)$.

1. Niech $a \in \mathbb{R}$ i $x_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Obliczyć granicę: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^a-1}{x_n}$.

2. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{4n-3} + \dfrac{1}{4n-1} - \dfrac{1}{2n}\right)$.

3. Udowodnić, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} (\frac{2}{3})^{n-j} a_j\right) = 3A$.

4. Niech $x \in \mathbb{R}$. Definiujemy $a_0 = x, a_{n+1} = x^{a_n}$ dla $n = 0, 1, \ldots$. Dla jakich $x > 1$ ciąg (a_n) ma granicę skończoną?

Tylko dla chętnych Dla jakich $x \in (0,1)$ ciąg (a_n) ma skończoną granicę? Odpowiedź z uzasadnieniem na to pytanie na oddzielnej kartce bez ograniczenia czasowego.

5. Dla jakich $k \in \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^k$ jest zbieżny.

AM1.1 — zadania domowe 5, termin 27 listopada (piątek).

Przypomnienia:

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i $x_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n}$.

$\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \in (0,1)$.

1. Niech $a \in \mathbb{R}$ i $x_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Obliczyć granicę: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^a-1}{x_n}$.

2. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{4n-3} + \dfrac{1}{4n-1} - \dfrac{1}{2n}\right)$.

3. Udowodnić, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} (\frac{2}{3})^{n-j} a_j\right) = 3A$.

4. Niech $x \in \mathbb{R}$. Definiujemy $a_0 = x, a_{n+1} = x^{a_n}$ dla $n = 0, 1, \ldots$. Dla jakich $x > 1$ ciąg (a_n) ma granicę skończoną?

Tylko dla chętnych Dla jakich $x \in (0,1)$ ciąg (a_n) ma skończoną granicę? Odpowiedź z uzasadnieniem na to pytanie na oddzielnej kartce bez ograniczenia czasowego.

5. Dla jakich $k \in \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^k$ jest zbieżny.