Analiza matematyczna 1.1, kolokwium, 20 listopada 2015 — rozwiązania

1. Wyznaczyć kresy zbioru
$$A = \left\{ \frac{11}{k} - \frac{3}{m}: \quad k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} .$$
Czy kresy te są osiągane w zbiorze A?

Rozwiązanie: Ponieważ $k \geqslant 1$ i $|m| \geqslant 1$ oraz $-|m| \leqslant m \leqslant |m|$, więc
$$-3 \leqslant -\tfrac{3}{|m|} \leqslant -\tfrac{3}{m} < \tfrac{11}{k} - \tfrac{3}{m} \leqslant 11 - \tfrac{3}{m} \leqslant 11 + \tfrac{3}{|m|} \leqslant 11 + 3 = 14,$$
przy czym pierwsza (od lewej) nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $|m| = 1$, czyli gdy $m \in \{-1, 1\}$, druga — gdy $m > 0$, czwarta — gdy $k = 1$, piąta — gdy $m < 0$, szósta gdy $|m| = 1$. Wynika stąd, że $14 = \frac{11}{1} - \frac{3}{-1}$ jest kresem górnym zbioru A i jest też jego elementem. Liczba -3 jest ograniczeniem dolnym zbioru A i nie jest jego elementem — trzecia nierówność jest ostra!

Pokażemy, że $\inf A = -3$, czyli że większego od -3 ograniczenia dolnego zbiór A nie ma. Niech $\alpha > -3$, czyli $\alpha + 3 > 0$. Z zasady Archimedesa wynika, że istnieje liczba naturalna $k > \frac{11}{\alpha+3}$, więc $\alpha > -3 + \frac{11}{k} = \frac{11}{k} - \frac{3}{1} \in A$, zatem w zbiorze A jest co najmniej jedna liczba mniejsza od α, a właśnie to chcieliśmy wykazać.

Udowodniliśmy, że $\quad \inf A = -3 \notin A, \quad \sup A = 14 \in A$. $\square$

2. Niech $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n}$. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności $\frac{n}{2} + 1 \leqslant a_n \leqslant n + \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie: Mamy $a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Również $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, więc dla $n = 1$ obie nierówności stają się równościami.

$a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$. Zachodzą oczywiste nierówności
$$\frac{1}{2} = \frac{2^n}{2^{n+1}} (2^{n+1} - 2^n) \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leqslant (2^{n+1} - 2^n) \frac{1}{2^n + 1} = \frac{2^n}{2^n + 1} < 1$$
— szacowaliśmy z lewej strony przez najmniejszy składnik pomnożony przez liczbę składników, a z prawej — przez największy pomnożony przez liczbę składników. Wynika z tych nierówności, że jeśli dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{n}{2} + 1 \leqslant a_n \leqslant n + \frac{1}{2}$ (zał. ind.), to
$$\frac{n+1}{2} = \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{2} \leqslant a_n + \frac{1}{2} \leqslant a_n + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} < a_n + 1 \leqslant n + \frac{1}{2} + 1 = (n+1) + \frac{1}{2},$$
czyli spełniona jest nierówność $\frac{n+1}{2} + 1 \leqslant a_{n+1} \leqslant n + 1 + \frac{1}{2}$ (teza ind.). Twierdzenie, które dowodzimy wynika teraz z zasady indukcji zupełnej. $\square$

3. Zbadać, w zależności od parametru $c > 0$, czy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{nc} + (ec)^n}$ i obliczyć ją dla tych c, dla których istnieje.

Rozwiązanie: Mamy (nierówność z wykładów): $e^c = e \cdot e^{c-1} \geqslant e(1 + c - 1) = ec$ i oczywiście $ec > 0$. Wobec tego $\quad e^c < \sqrt[n]{e^{nc} + (ec)^n} \leqslant \sqrt[n]{e^{nc} + (e^c)^n} = \sqrt[n]{2e^{nc}} = e^c \sqrt[n]{2}$.

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika od razu, że dla każdego $c > 0$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{nc} + (ec)^n} = e^c$. $\square$

4. Ciąg (a_n) dany jest wzorem rekurencyjnym $a_1 = a$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^2}{2}$, gdzie $a \geqslant 0$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Dla jakich (nieujemnych) a ciąg (a_n) ma granicę? Wyznaczyć ją, w zależności od a.

Rozwiązanie: Ponieważ $a_1 \geqslant 0$ i z tego, że $a_n \geqslant 0$ wynika, że $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_n^2) \geqslant 0$, więc wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne (to była indukcja). Zauważmy, że

$$x = \tfrac{1}{2}(x + x^2) \iff x = x^2 \iff (x = 0 \text{ lub } x = 1).$$

oraz jeśli $0 \leqslant x < 1$, to $x^2 \leqslant x$, zatem $\frac{1}{2}(x + x^2) \leqslant x$, a jeśli $x \geqslant 1$, to $x \leqslant x^2$, więc $x \leqslant \frac{1}{2}(x + x^2)$. Z tych stwierdzeń wnioskujemy, że

$$\text{jeśli } 0 \leqslant a_n < 1 \text{ dla pewnej liczby naturalnej } n, \text{ to } 0 \leqslant a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + a_n^2) \leqslant a_n.$$

Wynika stąd (indukcja), że jeśli $0 \leqslant a_1 < 1$, to $0 \leqslant a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_2 \leqslant a_1$, więc ciąg (a_n) ma granicę (jako nierosnący) i jeśli $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to $0 \leqslant A \leqslant a_1 < 1$ $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + a_n^2) = = \frac{1}{2}(A + A^2)$ i wobec tego $A = 0$.

Jeśli $a_1 = 1$, to dla każdego n prawdziwy jest wzór $a_n = 1$ (indukcja: jeśli $a_n = 1$, to $a_{n+1} = = \frac{1}{2}(a_n + a_n^2) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$).

Jeśli $a_n > 1$, to $a_{n+1} > a_n$, zatem jeśli $a_1 > 1$, to $a_n > 1$ dla każdego n oraz $a_{n+1} > a_n$, więc w tej sytuacji ciąg (a_n) jest ściśle rosnący. Ma więc granicę (skończoną lub nie). Niech $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wtedy $A \geqslant a_1 > 1$ oraz $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + a_n^2) = \frac{1}{2}(A + A^2)$. Żadna liczba **większa** od 1 nie jest pierwiastkiem tego równania. Wobec tego A nie jest liczbą, co oznacza, że $A = +\infty$. $\square$

5. Ciąg (x_n) ma tę własność, że ciąg (y_n) dany wzorem $y_n = 2x_{n+1} - x_n$ jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$. Czy wynika stąd, że ciąg (x_n) ma granicę? Jeżeli tak, to jaką?

Rozwiązanie: Zastosujemy twierdzenie Stolza do ilorazu $x_n = \frac{2^n x_n}{2^n}$. Ciąg (2^n) jest ściśle rosnący i $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$. Mamy też $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}x_{n+1} - 2^n x_n}{2^{n+1} - 2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n(2x_{n+1} - x_n)}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = g$. Z twierdzenia Stolza wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} = \frac{2^n x_n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}x_{n+1} - 2^n x_n}{2^{n+1} - 2^n} = g$. $\square$