

Analiza matematyczna 2, część dwunasta

Tekst poprawiony 4 września 2011, godz. 00:02

Zwykła prośba: proszę o informację o zauważonych błędach, poprawię.

Zajmiemy się teraz określeniem miary na rozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Rozpocznijmy od przykładu wskazującego na pewną trudność.

Przykład Schwarza

Niech W oznacza walec o wysokości 1 i którego podstawa ma promień 1. Wykażemy, że w powierzchni bocznej tego walca można wpisać wielościan, który ma dowolnie dużą powierzchnię i którego wszystkie krawędzie są krótkie. Ścianami tego wielościanu będą trójkąty równoramienne, więc pole będziemy w stanie znaleźć bez kłopotu. Podzielimy walec płaszczyznami równoległymi do podstaw na n przystających walców (czyli prowadzimy $n - 1$ płaszczyzn). Mamy więc $n + 1$ okręgów. W każdy z nich wpisujemy m -kąt foremny w ten sposób, że wierzchołki wielokąta wpisanego w $j + 1$ -wszy (licząc od dołu) okrąg znajdują się nad środkami łuków j -tego okręgu wyznaczonych przez sąsiednie wierzchołki wielokąta wpisanego w j -ty okrąg. Mamy więc $m(n + 1)$ punktów na powierzchni bocznej walca. Rozważamy powierzchnię będącą sumą trójkątów, których dwoma wierzchołkami są sąsiednie punkty jednego okręgu, a trzecim wierzchołkiem znajdujący się na sąsiednim okręgu nad lub pod środkiem łuku wyznaczonego przez dwa pierwsze. Otrzymujemy więc $2m$ trójkątów „między” sąsiednimi okręgami, w sumie $2mn$ trójkątów. Pole jednego takiego trójkąta równe jest $\sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{1}{n^2} + (1 - \cos \frac{\pi}{m})^2}$, zatem pole $P_{m,n}$ powierzchni całkowitej wielościanu równe jest $2m \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{1 + 4n^2 \sin^4 \frac{\pi}{m}}$. Przyjawszy $n = m$ otrzymujemy

$$P_{m,n} = 2m \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{1 + 4m^2 \sin^4 \frac{\pi}{m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 2\pi,$$

jest to rezultat zgodny z oczekiwaniami: pole wielościanu którego wszystkie krawędzie są bardzo krótkie i którego wierzchołki leżą na powierzchni bocznej walca w miarę gęsto przybliża pole powierzchni bocznej walca. Przyjmijmy teraz $n = m^2$. Otrzymujemy w tym przypadku

$$P_{m,n} = 2m \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{1 + 4m^4 \sin^4 \frac{\pi}{m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 2\pi \sqrt{1 + 4\pi^4},$$

a więc „za dużo”. Niech $n = m^3$. Teraz

$$P_{m,n} = 2m \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{1 + 4m^6 \sin^4 \frac{\pi}{m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty.$$

Oznacza to, że próba zdefiniowania pola powierzchni bocznej walca przez przybliżanie polami wielościanów wpisanych w tę powierzchnię skończy się niepowodzeniem, chyba że zwiększymy wymagania wobec nich. Przyczyną tych nieco dziwacznych rezultatów jest to, że rozpatrywane trójkąty mając wierzchołki na powierzchni bocznej walca i krótkie krawędzie nie przybliżały jednak powierzchni bocznej, bo kąt między płaszczyzną trójkąta i powierzchnią boczną nie dążył w drugim ani w trzecim przypadku do 0 (w pierwszym tak było). Oznacza to, że przy wprowadzaniu definicji należy zadbać również o ten czynnik. ■

Załóżmy, że $\psi : V \longrightarrow M \subseteq \mathbb{R}^k$ jest parametryzacją pewnego otwartego podzbioru $U = \psi(V)$ rozmaitości m -wymiarowej M . Zdefiniujemy najpierw miarę borelowską na zbiorze U . Przypomnijmy, że wyznacznikiem Grama wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ nazywamy wyznacznik macierzy $(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)_{1 \leq i, j \leq m}$. Pełni on rolę kwadratu objętości m -wymiarowego równoległościanu rozpiętego przez wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$. Jeśli jest on równy 0, to wektory są liniowo zależne, co jest zgodne z intuicyjnym pojmowaniem objętości.

Zdefiniujemy $g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = \det(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j)_{1 \leq i, j \leq m}$ dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^k$. Mamy więc $g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$. Jasne jest, że funkcja g jest $2m$ -liniowa na $(\mathbb{R}^k)^{2m}$ przy czym jest ona antysymetryczna jako funkcja wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ przy ustalonych wektorach $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$. Jest też antysymetryczna przy ustalonych wektorach $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ jako funkcja wektorów $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$. Mamy

$$\begin{aligned} g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m + t\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m + t\mathbf{v}_1) &= g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) + \\ &+ g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, t\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) + g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, t\mathbf{v}_1) + \\ &+ g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, t\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, t\mathbf{v}_1) = \\ &= g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) + 0 + 0 + 0 = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m), \end{aligned}$$

bo wyznacznik macierzy zawierającej proporcjonalne wiersze jest równy 0. Oczywiście wektor $\mathbf{v}_1$ można zastąpić dowolnym z wektorów $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{m-1}$. W rezultacie: wartość wyznacznika Grama układu wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ nie zmienia się w wyniku dodania do wektora $\mathbf{v}_m$ dowolnej kombinacji liniowej wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{m-1}$. Można więc odjąć od $\mathbf{v}_m$ rzut tego wektora na podprzestrzeń rozpiętą przez wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{m-1}$ zachowując wartość wyznacznika Grama. Z definicji wynika natychmiast, że jeśli $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_m$ dla $i = 1, 2, \dots, m-1$, to zachodzi $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{m-1}) \|\mathbf{v}_m\|^2$. To żywo przypomina dosyć znany wzór na objętość równoległościanu: objętość równoległościanu to iloczyn pola podstawy i wysokości. Druga miła okoliczność to niezmienniczość wyznacznika Grama przy izometriach: jeśli $L: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest izometrią liniową, to $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) = G(L\mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2, \dots, L\mathbf{v}_m)$. Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^k$ istnieje izometria liniowa $L: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ taka, że $L\mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2, \dots, L\mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m \times \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{k-m}$. Dla wektorów

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m$ wyznacznik Grama $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ jest równy kwadratowi wyznacznika macierzy, której kolumnami są wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$, czyli kwadratowi miary Lebesgue'a ℓ_m równoległościanu rozpiętego przez te wektory. Rozsądnie jest więc przyjąć, że $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ jest kwadratem miary równoległościanu rozpiętego przez wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ nie tylko w tym przypadku, ale również, gdy są one położone w przestrzeni wyższego wymiaru (np. równoległobok w $\mathbb{R}^3$ ma jakieś pole).

Jeśli $\psi: V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest parametryzacją otwartego podzbioru U rozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^k$, $\mathbf{q} \in V$, to różniczka $D\psi(\mathbf{q}): \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ odwzorowuje przestrzeń $\mathbb{R}^m$ na $T_{\psi(\mathbf{q})}M$. Jeśli Q jest kostką o środku $\mathbf{q}$, to $D\psi(\mathbf{q})(Q) \subseteq T_{\psi(\mathbf{q})}$ jest m -wymiarowym równoległościanem, którego objętość rów-

na jest $\sqrt{\det(D\psi(\mathbf{q})^T \cdot D\psi(\mathbf{q}))} \cdot \ell_m(Q)$. To sugeruje następującą definicję: jeśli $A \subseteq V$, to

$$\ell_M(\psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\psi(\mathbf{q})^T \cdot D\psi(\mathbf{q}))} d\ell_m.$$

Tutaj ℓ_M oznacza miarę na rozmaitości, którą właśnie definiujemy. Nazywać ją będziemy miarą Lebesgue'a–Riemanna na M . Taka definicja wymaga po pierwsze stwierdzenia, że wynik jest zależny jedynie od zbioru $\psi(A)$, a nie od A , ψ itp. Po drugie trzeba wyjaśnić, dla jakich zbiorów określamy miarę, po trzecie trzeba rozszerzyć tę definicję na zbiory, które nie są zawarte w dziedzinie jednej mapy, czyli na taki, których nie można sparametryzować za pomocą jednego przekształcenia ψ .

Zacniemy od pierwszej kwestii. Dowód odpowiedniego lematu poprzedzimy dosyć ważnym twierdzeniem opisującym strukturę przekształcenia klasy C^r , którego różniczka ma rząd niezależny od punktu.

Twierdzenie o rzędzie

Jeśli $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^l$ jest przekształceniem klasy C^r , $r \geq 1$ i dla każdego $\mathbf{x} \in V \subseteq \mathbb{R}^k$ zachodzi równość $r(D\psi)(\mathbf{x}) = m$, to dla każdego punktu $\mathbf{q} \in V$ istnieją otwarte otoczenia $V_1 \ni \mathbf{q}$ oraz $V_2 \ni \psi(\mathbf{q})$ oraz dyfeomorfizmy (na obraz) $f: V_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g: V_2 \rightarrow \mathbb{R}^l$ takie, że

$$g \circ \psi \circ f^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1, x_2, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-m})$$

Dowód. Niech $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l)$. Niech $\mathbf{q} \in V$. Ponieważ rząd przekształcenia $D\psi(\mathbf{q})$ równy jest m , więc pewien minor wymiaru m macierzy $D\psi(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{q}) \right)$ jest różny od 0. Po ewentualnej zmianie numeracji współrzędnych w dziedzinie lub w obrazie można przyjąć, że $\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{q}) \right|_{1 \leq i, j \leq m} \neq 0$. Niech $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_k) = (\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots, \psi_m(\mathbf{x}), x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_k)$, oczywiście jeśli $m = k$, to współrzędnych o numerach większych niż $m = k$ nie ma. Przekształcenie f jest oczywiście tej samej klasy co ψ (a przynajmniej nie mniejszej). Mamy

$$Df(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(\mathbf{q}) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m}(\mathbf{q}) & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{m+1}}(\mathbf{q}) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}(\mathbf{q}) & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_m}(\mathbf{q}) & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_{m+1}}(\mathbf{q}) & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_k}(\mathbf{q}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1}(\mathbf{q}) & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m}(\mathbf{q}) & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_{m+1}}(\mathbf{q}) & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k}(\mathbf{q}) \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik tej macierzy równy jest $\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{q}) \right|_{1 \leq i, j \leq m} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Wynika stąd (twierdzenie

o odwracaniu funkcji), że istnieje otoczenie V_1 punktu $\mathbf{q}$, po obcięciu do którego f jest dyfeomorfizmem. Pierwszych m współrzędnych przekształcenia $\psi \circ f^{-1}$ pokrywa się z pierwszymi m współrzędnymi przekształcenia $f \circ f^{-1} = \text{id}$. Niech $\psi(f^{-1}(\mathbf{x})) = (x_1, \dots, x_m, \tilde{\psi}_{m+1}(\mathbf{x}), \dots, \tilde{\psi}_l(\mathbf{x}))$.

Bez trudu stwierdzamy, że

$$D(\psi \circ f^{-1})(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_m}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_m}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Złożenie przekształcenia liniowego z izomorfizmem nie zmienia rzędu. Wobec tego rząd $D(\psi \circ f^{-1})(\mathbf{x})$ jest równy m , czyli taki sam jak macierz jednostkowa znajdująca się w lewym górnym rogu macierzy $D(\psi \circ f^{-1})(\mathbf{x})$. Wynika stąd, że $\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0$ dla $i = m+1, \dots, l$, $j = m+1, \dots, k$. Oznacza to, że funkcje $\tilde{\psi}_{m+1}, \tilde{\psi}_{m+2}, \dots, \tilde{\psi}_l$ nie zależą od zmiennych $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_k$, po ewentualnym zmniejszeniu V_1 można przyjąć, że $f(V_1)$ jest k -wymiarowym przedziałem, więc nie mam kłopotu z wywnioskowaniem stałości funkcji, której pochodna jest zerowa. Mamy więc prawo pisać $\tilde{\psi}_j(x_1, \dots, x_m)$ zamiast $\tilde{\psi}_j(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_k)$ w przypadku $j = m+1, \dots, l$. Definiujemy teraz $g(y_1, \dots, y_l) = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1} - \tilde{\psi}_{m+1}(y_1, \dots, y_m), \dots, y_l - \tilde{\psi}_l(y_1, \dots, y_m))$. Można z łatwością przekonać się o tym, że $g \circ \psi \circ f^{-1}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ oraz że g jest dyfeomorfizmem: $g^{-1}(y_1, \dots, y_l) = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1} + \tilde{\psi}_{m+1}(y_1, \dots, y_m), \dots, y_l + \tilde{\psi}_l(y_1, \dots, y_m))$. Dowód został zakończony. ■

Lemat o przechodzeniu od jednej mapy do drugiej mapy

Jeśli $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ i $\tilde{\psi}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ są homeomorfizmami klasy C^r , $r \geq 1$, których różniczki we wszystkich punktach są różnowartościowe, $\psi(V) = \tilde{\psi}(\tilde{V})$, to przekształcenie $\psi^{-1} \circ \tilde{\psi}$ jest dyfeomorfizmem.

Dowód. Niech $\mathbf{q} \in V$. Zgodnie z twierdzeniem o rzędzie istnieją (lokalnie) dyfeomorfizmy g i f takie, że $g \circ \psi \circ f^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ w pewnym otoczeniu punktu $f(\mathbf{q})$. Przekształcenie $g \circ \psi \circ f^{-1}$ formalnie przekształca pewien podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^m$ w przestrzeń $\mathbb{R}^k$, ale faktycznie — w $\mathbb{R}^m$. Można je więc odwracać, odwrotne jest klasy C^r . Zachodzi równość

$$\psi^{-1} \circ \tilde{\psi} = f^{-1} \circ (g \circ \psi \circ f^{-1})^{-1} \circ g \circ \tilde{\psi}.$$

Z niej wynika, że $\psi^{-1} \circ \tilde{\psi}$ klasy C^r , bo jest złożeniem przekształceń takiej klasy (różniczkowalność w punkcie jest własnością lokalną, więc niczemu w dowodzie nie przeszkadza to, że rozważane złożenie jest określone jedynie w dostatecznie małym otoczeniu punktu $f(\mathbf{q})$). Jest to oczywiście prawdą również w przypadku przekształcenia odwrotnego $\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi$, zatem jest to dyfeomorfizm. Dowód został zakończony. ■

Lemat o niezależności miary od mapy

Jeśli $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ i $\tilde{\psi}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ są homeomorfizmami klasy C^r , $r \geq 1$, których różniczki we

wszystkich punktach są różnowartościowe, $A \subseteq \psi(V) = \tilde{\psi}(\tilde{V})$ jest zbiorem borelowskim, to

$$\int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det(D\psi(\mathbf{q})^T \cdot D\psi(\mathbf{q}))} d\ell_m = \int_{\tilde{\psi}^{-1}(A)} \sqrt{\det(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q}))} d\ell_m.$$

Dowód. Skorzystamy z tego, że przekształcenie $\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi$ jest dyfeomorfizmem (poprzedni lemat). Z twierdzenia o zamianie zmiennych wynika, że (we wzorach poniżej $\mathbf{q} = (\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})$)

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\psi}^{-1}(A)} \sqrt{\det(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q}))} d\ell_m(\mathbf{q}) &= \\ &= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q})) \cdot |\det D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})|} d\ell_m(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q})) \cdot (\det D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x}))^2} d\ell_m(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det(D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x}))^T \cdot \det(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T D\tilde{\psi}(\mathbf{q})) \cdot \det D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})} d\ell_m(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det[(D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x}))^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q}) \cdot D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})]} d\ell_m(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det[(D\tilde{\psi}(\mathbf{q}) \cdot D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x}))^T D(\tilde{\psi} \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})]} d\ell_m(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det[(D\psi(\mathbf{x}))^T D\psi(\mathbf{x})]} d\ell_m(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

W tym rozumowaniu korzystaliśmy z tego, że wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych jest iloczynem wyznaczników macierzy oraz, że w mnożeniu liczb jest przemienne (mnożenie macierzy niestety przemienne nie jest). ■

Teraz można już zdefiniować miarę na rozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Istnieje na każdej z nich atlas złożony z nie więcej niż przeliczalnej liczby map $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Załóżmy, że ich dziedzinami są zbiory $U_1, U_2, \dots$. Jeśli $A \subseteq M$ jest zbiorem borelowskim, to każdy ze zbiorów $V_1 := A \cap U_1$, $V_2 := A \cap U_2 \setminus U_1$, $V_3 := A \cap U_3 \setminus (U_1 \cup U_2)$, $\dots$ jest borelowski, są one parami rozłączne, więc można miarę określić wzorem

$$\ell_M(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_M(V_n), \text{ gdzie } \ell_M(V_n) = \int_{\varphi_n(V_n)} \sqrt{\det(D\varphi^{-1}(\mathbf{x})^T D\varphi^{-1}(\mathbf{x}))} d\ell_m(\mathbf{x}).$$

Wykazaliśmy, że wynik nie zależy od wyboru mapy. Jest jasne, że jest on również niezależny od sposobu rozbicia zbioru A na rozłączne podzbiory mieszczące się w dziedzinach map z jednego atlasu (na dziedzinie jednej mapy ℓ_m jest miarą, więc mając dwa rozbicia przeliczalne rozbicia $\{V_n\}$ i $\{W_m\}$ zbioru A możemy rozważyć rozbiecie przeliczalne $\{V_n \cap W_m\}$ zbioru A). Miarę określiliśmy na zbiorach borelowskich. Można ją uzupełnić (np. korzystając z twierdzenia Caratéodory'go) dołączając do σ -ciała podzbiory zbiorów miary 0. Można też od razu przyjąć, że zbiór A jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\varphi(A \cap U)$ jest mierzalny dla dowolnej mapy φ określonej na zbiorze U . Rozumowanie nie ulega zmianie, bo dyfeomorfizmy przekształcają zbiory mierzalne na zbiory mierzalne.

Przykład (sfera)

Znajdziemy miarę sfery k -wymiarowej $S^k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$. Miara zbioru skończonego jest oczywiście

wzoru bez trudu można otrzymać wzór na miarę sfery k -wymiarowej o promieniu $r > 0$.

Zadanko

Wykazać, że jeśli S_r jest k -wymiarową sferą o promieniu r , to

$$\ell_{S_r}(S_r) = r^k \ell_{S^k}(S^k) = r^k \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})} \cdot \sqrt{\pi} \cdot k \cdot \ell_k(B(\mathbf{0}, 1)). \blacksquare$$

Zadanko

Wykazać, że liczba $\int_0^R \ell_{S_r}(S_r) dr$ jest miarą $k+1$ -wymiarowej kuli o promieniu $R > 0$. ■

Drugie zadanie jest ważne. Należy spróbować zrozumieć dlaczego to twierdzenie jest prawdziwe. Ono obejmuje wzory, które wszyscy kończący licea znają, ale nieliczni je zauważają:

$$(\pi r^2)' = 2\pi r, \quad \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2.$$

W zasadzie niewiele zostało tu do zrobienia, wystarczy się uważnie przyjrzeć temu, co zrobiliśmy.

W części dziewiątej zdefiniowaliśmy środek ciężkości zbioru borelowskiego $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Pojęcie to możemy teraz stosować do rozmaitości. Można też wykazać twierdzenie Pappusa—Guldina dla powierzchni obrotowych.

Twierdzenie Pappusa—Guldina*

Jeśli $A \subseteq \tilde{M} \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: x_2 = 0 < x_1\}$ jest zbiorem, który ma środek ciężkości względem miary $\ell_{\tilde{M}}$, $\tilde{M}$ jest rozmaitością, B jest zbiorem, który powstaje w wyniku obrotu zbioru A o kąt 2π wokół prostej $x_1 = x_2 = 0$, to $\ell_M(B) = 2\pi r \ell_{\tilde{M}}(A)$, gdzie r jest odległością środka ciężkości zbioru A od osi obrotu, $M \subseteq \mathbb{R}^3$ jest rozmaitością powstałą w wyniku obrotu rozmaitości $\tilde{M}$ wokół prostej $x_1 = x_2 = 0$.

Dowód. Zaczniemy oczywiście od wykazania, że M jest rozmaitością zakładając, że $\tilde{M}$ jest rozmaitością *jednowymiarową*. Przypadek dwuwymiarowej rozmaitości $\tilde{M}$ jest objęty poprzednią wersją tego twierdzenia, rozmaitości wymiaru 0 nie są przesadnie interesujące: są to przestrzenie dyskretnie. Niech $\tilde{U}$ będzie dziedziną mapy $\tilde{\varphi}$ i niech $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}^{-1}$, $\tilde{V} = \tilde{\varphi}(\tilde{U})$. Niech $\tilde{\psi}(x) = (\psi_1(x), 0, \psi_3(x))$. Definiujemy $\psi(x, t) = (\psi_1(x) \cos t, \psi_1(x) \sin t, \psi_3(x))$. Jeśli liczby t wybierane są z przedziału (α, β) o długości mniejszej niż 2π , to przekształcenie ψ jest ciągłe i różnowartościowe. Różnowartościowość wynika natychmiast z różnowartościowości $\tilde{\psi}$ i różnowartościowości przekształcenia $t \rightarrow (\cos t, \sin t)$ na przedziale długości $< 2\pi$. Przekształcenie ψ jest homeomorfizmem: jeśli $\psi(x_n, t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi(y, s)$, to $\psi_3(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi(y)$ i

$$\psi_1(x_n) = \sqrt{(\psi_1(x_n) \cos t_n)^2 + (\psi_1(x_n) \sin t_n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{(\psi_1(y) \cos s)^2 + (\psi_1(y) \sin s)^2} = \psi(y).$$

Stąd i z ciągłości φ wynika, że $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Co najmniej jedna z liczb $|\cos s|$, $|\sin s|$ jest różna od 1. Dla ustalenia uwagi niech $-1 < \cos s < 1$. Wtedy w pewnym otoczeniu liczby s funkcja $\cos$ jest homeomorfizmem. Wobec tego z równości $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos t_n = \cos s$ wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$. Mamy

* Pappus (290–350), Guldin (1577–1643)

$$D\psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi'_1(x) \cos t & -\psi_1(x) \sin t \\ \psi'_1(x) \sin t & \psi_1(x) \cos t \\ \psi'_3(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Mamy więc

$$D\psi(x, t)^T D\psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi'_1(x)^2 + \psi'_3(x)^2 & 0 \\ 0 & \psi_1^2(x) \end{pmatrix}.$$

Wobec tego $\det(D\psi(x, t)^T D\psi(x, t)) = (\psi'_1(x)^2 + \psi'_3(x)^2)\psi_1(x)^2 > 0$, bo $D\tilde{\psi}(x)$ jest różnowartościowe, zatem $D\psi(x, t)$ również jest różnowartościowe (rzęd tego przekształcenia liniowego jest równy 2). Wskazaliśmy więc atlas dla M . Możemy teraz znaleźć miarę zbioru $\psi(\varphi(A) \times (0, 2\pi))$. Jest ona na mocy definicji równa

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(A) \times (0, 2\pi)} \sqrt{(\psi'_1(x)^2 + \psi'_3(x)^2)\psi_1(x)^2} &\stackrel{\text{Fubini}}{=} 2\pi \int_{\varphi(A)} \psi_1(x) \sqrt{\psi'_1(x)^2 + \psi'_3(x)^2} d\ell_1(x) = \\ &= 2\pi \int_A x_1 d\ell_{\tilde{M}}(x) = 2\pi \ell_{\tilde{M}}(A) \cdot \frac{1}{\ell_{\tilde{M}}(A)} \int_A x_1 d\ell_{\tilde{M}}(x). \end{aligned}$$

Liczba $\frac{1}{\ell_{\tilde{M}}(A)} \int_A x_1 d\ell_{\tilde{M}}(x)$ to pierwsza współrzędna środka ciężkości zbioru A względem miary $\ell_{\tilde{M}}$, zatem jest to odległość od prostej $x_1 = 0 = x_2$, czyli od osi obrotu, jest więc równa r . ■

Widać więc, że jest to taki sam dowód, jak poprzedniej wersji tego twierdzenia. Z tego twierdzenia łatwo można wyprowadzić wzory na pole powierzchni bocznej stożka, lub ogólniej stożka ściętego — wystarczy stwierdzić, że środkiem ciężkości odcinka jest jego środek. Można znaleźć wzór na pole powierzchni torusa, jeśli tylko zdołamy wykazać, że środkiem ciężkości okręgu (nie koła!) jest jego środek. Wzór jest użyteczny i łatwy w dowodzie. W zasadzie to szczególny przypadek twierdzenia Fubiniego.

Warto dodać jeszcze, że jeśli $f: M \rightarrow [0, \infty]$ jest funkcją mierzalną a zbiór $A \subseteq M$ jest zawarty w obrazie parametryzacji $\psi: V \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^k$, to

$$\int_A f d\ell_M = \int_{\psi^{-1}(A)} f \circ \psi \sqrt{D\psi(\mathbf{x})^T D\psi(\mathbf{x})} d\ell_m(\mathbf{x}).$$

Ten wzór pozwala w wielu przypadkach na całkowanie funkcji określonych na rozmaitościach. Oczywiście funkcję nieujemną można zastąpić funkcją całkowalną lub taką, która ma całkę, niekoniecznie skończoną.