FUNKCJE Γ i β EULERA

Niech $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Ta całka jest zbieżna dla każdej liczby $x > 0$. Mamy bowiem $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t < \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}t^x\Big|_0^1 = \frac{1}{x}$, więc całka po przedziale $0,1]$ jest skończona nawet wtedy, gdy funkcja podcałkowa nie jest ograniczona. Mamy też $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t < \infty$, bo dla każdej liczby naturalnej $n > x-1$ zachodzi nierówność $t^{x-1}e^{-t} \leqslant \frac{(n+2)!t^{x-1}}{t^{n+2}} \leqslant \frac{(n+2)!}{t^2}$, zatem $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \leqslant$ $\leqslant (n+2)!\int_0^1 t^{-2}\mathrm{d}t = (n+2)!$. Wobec tego dla $x > 0$ $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \in (0,\infty)$.

Mamy $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \xlongequal[\text{przez części}]{\text{całkujemy}} \frac{1}{x}t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty t^x e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$. Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi równość $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Wziąwszy pod uwagę oczywistą równość $\Gamma(1) = 1$ otrzymujemy kolejno $\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 3\cdot 2, \ldots, \Gamma(n) = (n-1)!$ dla każdej liczby naturalnej $n > 0$. Zdefiniowaliśmy więc funkcję, której wartości w punktach naturalnych są równe $(n-1)!$, ale która jest zdefiniowana dla wszystkich liczb dodatnich. Takich funkcji można zdefiniować nieskończenie wiele różnymi wzorami. Zachęcam Państwa do zrobienia tego tak, by otrzymać funkcję klasy C^∞ na $(0,\infty)$, każdy powinien przynajmniej ze dwie takie funkcje zdefiniować dla własnej **satysfakcji**.

Wykażemy, że naturalne warunki nałożone na funkcję Γ możliwości wyboru wykluczą.

Twierdzenie 12.8 (H.Bohra[1])
Istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\Gamma\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, że $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla każdego $x > 0$, $\ln\Gamma$ jest funkcją wypukłą.

Dowód poprzedzimy kilkoma lematami. Będziemy mówić *funkcja logarytmicznie wypukła* zamiast *logarytm funkcji jest funkcją wypukłą*.

Lemat 12.9 (o sumie funkcji logarytmicznie wypukłych)
Suma funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą. Zakładamy dodatkowo, że jeśli któryś koniec dziedziny jest jej elementem, to funkcja jest w nim ciągła, ciągłość wewnątrz dziedziny wynika z wypukłości.

Dowód. Załóżmy, że funkcje f i g są logarytmicznie wypukłe na przedziale I. Oznacza to, że dla dowolnych $x,y \in I$ zachodzą nierówności $\ln f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{1}{2}[\ln f(x) + \ln f(y)]$ oraz $\ln g(\frac{x+y}{2}) \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{2}[\ln g(x) + \ln g(y)]$, czyli $f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \sqrt{f(x)f(y)}$ i $g(\frac{x+y}{2}) \leqslant \sqrt{g(x)g(y)}$. Udowodnimy, że

$$f(\tfrac{x+y}{2}) + g(\tfrac{x+y}{2}) \leqslant \sqrt{\big(f(x)+g(x)\big)\big(f(y)+g(y)\big)}.$$

Z logarytmicznej wypukłości funkcji f,g i z nierówności Schwarza wynika, że

$$f(\tfrac{x+y}{2}) + g(\tfrac{x+y}{2}) \leqslant \sqrt{f(x)f(y)} + \sqrt{g(x)g(y)} = \sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + \sqrt{g(x)}\sqrt{g(y)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\big[\sqrt{f(x)}\,\big]^2 + \big[\sqrt{g(x)}\,\big]^2}\cdot\sqrt{\big[\sqrt{f(y)}\,\big]^2 + \big[\sqrt{g(y)}\,\big]^2} = \sqrt{\big(f(x)+g(x)\big)\big(f(y)+g(y)\big)}.$$

Ponieważ funkcja $\ln(f+g)$ jest ciągła, więc aby stwierdzić, że jest wypukła wystarcza sprawdzić warunek Jensena wyłącznie, gdy wagi są równe $\frac{1}{2}$, a to właśnie uczyniliśmy. ■

Lemat 12.10 (o logarytmicznej wypukłości granicy)
Jeśli $f_n \longrightarrow f$ i wszystkie funkcje $f_1, f_2, \ldots$ są logarytmicznie wypukłe, to funkcja f też jest logarytmicznie wypukła.

[1] Młodszy brat Nielsa Bohra, jedyny znany matematyk, który zdobył medal olimpijski, srebrny w 1908 r, piłka nożna, reprezentacja Danii.

Dowód. Jeśli $0 \le \alpha \le 1$, to dla każdej liczby naturalnej n i dowolnych $x, y \in I$ zachodzi nierówność $\ln f_n\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \le \alpha \ln f_n(x) + (1-\alpha)\ln f_n(y)$. Stąd i z ciągłości logarytmu wynika nierówność $\ln f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \le \alpha \ln f(x) + (1-\alpha)\ln f(y)$, a to oznacza, że funkcja graniczna f jest logarytmicznie wypukła. ■

Lemat 12.11 (o logarytmicznej wypukłości całki)
Jeśli $0 < a < A$, to funkcja, która przypisuje liczbie x liczbę $\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ jest logarytmicznie wypukła

Dowód. Niech $f_n(x) = \frac{A-a}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\big(a+\frac{j}{n}(A-a)\big)^{x-1}e^{-a-j(A-a)/n}$. Ponieważ $f_n(x)$ to suma Riemanna całki $\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A-a}{n} = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^A t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Wystarczy więc udowodnić, że funkcja f_n jest logarytmicznie wypukła. Dla każdego wskaźnika $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ funkcja opisana jako $x \to \big(a + \frac{j}{n}(A-a)\big)^{x-1}e^{-a-j(A-a)/n}$ jest logarytmicznie wypukła, bo jej logarytm jest funkcją zwaną dawniej liniową, a dziś afiniczną. Ponieważ suma funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła, więc f_n jest logarytmicznie wypukła. ■

Lemat 12.12 (o logarytmicznej wypukłości całki niewłaściwej)
Funkcja przypisująca liczbie $x > 0$ liczbę $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ jest logarytmicznie wypukła.
Dowód. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do 0, zaś (A_n) ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do ∞ i niech $a_n < A_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Mamy więc $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{a_n}^{A_n} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, zatem teza lematu wynika z lematu o logarytmicznej wypukłości granicy. ■

Z udowodnionych lematów wynika od razu, że funkcja $x \longrightarrow \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ spełnia warunki wymienione w twierdzeniu H.Bohra.

Dowód twierdzenia H.Bohra

Niech $\Gamma\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ będzie funkcją taką, że $\Gamma(1) = 1$, $\gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla każdego $x > 0$, $\ln\Gamma$ jest funkcją wypukłą i niech $g(x) = \ln\Gamma(x)$. Spełnione są więc warunki
(i) $g(1) = 0$,
(ii) $g(x+1) - g(x) = \ln x$,
(iii) g jest funkcją wypukłą.
Niech $x \in (0, 1]$ i niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Ponieważ iloraz różnicowy funkcji wypukłej jest funkcją niemalejąca każdego swego argumentu z osobna, więc zachodzi nierówność:

$$g(n) - g(n-1) = \frac{g(n-1) - g(n)}{n-1-n} \leqslant \frac{g(n+x) - g(n)}{n+x-n} \leqslant \frac{g(n+1) - g(n)}{n+1-n} = g(n+1) - g(n)\,,$$

zatem

$$x\ln(n-1) = x[g(n) - g(n-1)] \leqslant g(n+x) - g(n) \le x[g(n+1) - g(n)] = x\ln n\,.$$

Mamy też
$$g(n+x) - g(x) = g(n+x) - g(n-1+x) + g(n-1+x) - g(n-2+x) + \cdots + g(x+1) - g(x) = \\ = \ln(n-1+x) + \ln(n-2+x) + \cdots + \ln(1+x) + \ln x.$$
Analogicznie
$$g(n) = g(n) - g(n-1) + g(n-1) - g(n-2) + \cdots + g(2) - g(1) = \ln(n-1) + \ln(n-2) + \cdots + \ln 1.$$
Wobec tego

$g(x+n)-g(n)=g(x)+\ln(n-1+x)+\ln(n-2+x)+\cdots+\ln(1+x)+\ln x-$
$-\left[\ln(n-1)+\ln(n-2)+\cdots+\ln 1\right]=g(x)+\ln x+\sum_{j=1}^{n-1}\ln(1+\frac{x}{j})$.

Możemy też napisać $\ln n=\ln(1+\frac{1}{n-1})+\ln(1+\frac{1}{n-2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{1})=\sum_{j=1}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{j})$ oraz $\ln(n-1)=\sum_{j=1}^{n-2}\ln(1+\frac{1}{j})$. To pozwala napisać podwójną nierówność, w której funkcja g wystąpi już tylko jeden raz:

$$-\ln x-\sum_{j=1}^{n-2}\ln\Big(1+\frac{x}{j}\Big)+x\sum_{j=1}^{n-2}\ln\Big(1+\frac{1}{j}\Big)\leq g(x)\leq -\ln x-\sum_{j=1}^{n-1}\ln\Big(1+\frac{x}{j}\Big)+x\sum_{j=1}^{n-1}\ln\Big(1+\frac{1}{j}\Big).$$

Jeśli $0<y\leq 1$, to $\ln(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}4y^3-\frac{1}{4}y^4+\cdots$. Z tej równości wynika, że dla każdego $j\geq 2$ zachodzi nierówność

$$-\tfrac{x}{2j^2}=\left[\tfrac{x}{j}-\tfrac{x}{2j^2}\right]-\tfrac{x}{j}\leq x\ln(1+\tfrac{1}{j})-\ln(1+\tfrac{x}{j})\leq\tfrac{x}{j}-\left[\tfrac{x}{j}-\tfrac{x^2}{2j^2}\right]=\tfrac{x^2}{2j^2}.$$ [2]

Z tej nierówności wynika, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty}\left[x\ln(1+\frac{1}{j})-\ln(1+\frac{x}{j})\right]$ jest bezwzględnie zbieżny. Na przedziale $[0,1]$ zbieżność jest jednostajna. Wobec tego zachodzi równość

$$g(x)=-\ln x+\sum_{j=1}^{\infty}\left[x\ln(1+\tfrac{1}{j})-\ln(1+\tfrac{x}{j})\right].$$

Okazało się, że funkcja g **musi** być zdefiniowana konkretnym wzorem. Ta uwaga kończy dowód twierdzenia Bohra. ■

Twierdzenie 12.13 (wzór Gaussa)

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}n^x\cdot\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{(1+x)(2+x)\ldots(n-1+x)}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}n^x\cdot\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Dowód. Wzór ten wynika od razu z oszacowań funkcji g i z równości

$$\exp\left[-\ln x-\sum_{j=1}^{n-1}\ln\left(1+\tfrac{x}{j}\right)+x\sum_{j=1}^{n-1}\ln\left(1+\tfrac{1}{j}\right)\right]=\tfrac{1}{x}\cdot\Pi_{j=1}^{n-1}(1+\tfrac{1}{j})^x\cdot\Pi_{j=1}^{n-1}\tfrac{j}{j+x}=$$
$$=\tfrac{1}{x}\cdot n^x\cdot\tfrac{(n-1)!}{(1+x)(2+x)\ldots(n-1+x)}.$$ ■

Twierdzenie 12.14 (wzór Weierstrassa)

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}e^{x/n}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-1},$$

gdzie γ oznacza stałą Eulera, tzn. $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right]=$
$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\ln(1+1)+\frac{1}{2}-\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]$.

Dowód. Mamy

$$\Gamma(x)=\exp[g(x)]=\exp\{-\ln x+\sum_{j=1}^{\infty}[x\ln(1+\tfrac{1}{j})-\ln(1+\tfrac{x}{j})]\}=$$
$$=\exp\{-\ln x+\sum_{j=1}^{\infty}x[\ln(1+\tfrac{1}{j})-\tfrac{1}{j}]+\sum_{j=1}^{\infty}[\tfrac{x}{j}-\ln(1+\tfrac{x}{j})]\}=$$
$$=\exp\{-\ln x-\gamma x+\sum_{j=1}^{\infty}[\tfrac{x}{j}-\ln(1+\tfrac{x}{j})]\}=\tfrac{1}{x}\cdot e^{-\gamma x}\cdot\prod_{j=1}^{\infty}e^{x/j}(1+\tfrac{x}{j})^{-1}.$$

Dowód wzoru Weierstrassa został zakończony w przypadku $0<x\leq 1$. Otrzymany iloczyn nieskończony jest zbieżny jednostajnie w każdym zwartym podzbiorze K płaszczyzny, który nie zawiera ani jednej liczby całkowitej niedodatniej (dodatnie nam nie przeszkadzają, dla ujemnych nie wszystkie wyrazy iloczynu nieskończonego są zdefiniowane, więc o zbieżności w ogóle mówić się nie da). Jednostajna zbieżność iloczynu wynika z tego, że dla dostatecznie dużych n i wszystkich $x\in K$ zachodzi nierówność $\left|\frac{x}{n}\right|<\frac{1}{2}$, więc logarytm liczby $1+\frac{x}{n}$ jest dobrze określony i możemy korzystać z rozwinięcia $\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots$. Te same komentarze dotyczą wzoru

[2] W rzeczywistości możemy wyrażenie $x\ln(1+\frac{1}{j})-\ln(1+\frac{x}{j})$ nieco lepiej oszacować z góry: ta funkcja zmiennej x jest ściśle wypukła jako różnica funkcji liniowej i ściśle wklęsłej, przyjmuje w punktach 0 i 1 wartość 0, zatem na przedziale $(0,1)$ jest ujemna. Mamy więc $-\frac{x}{2j^2}\leq x\ln(1+\frac{1}{j})-\ln(1+\frac{x}{j})\leq 0$.

Gaussa. Z obu wzorów Gaussa i Weierstrassa wynika, że $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}$ z wyjątkiem $z=0,-1,-2,\ldots$. Wobec tego oba wzory określają tę samą funkcję. Dla $x>0$ mamy więc

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\tfrac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}n^x\cdot\tfrac{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{(1+x)(2+x)\ldots(n-1+x)}=\tfrac{1}{x}\cdot e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}e^{x/n}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^{-1}.\ \blacksquare$$

Wykażemy teraz, że zachodzi też wzór Stirlinga - nie będzie to jego najsilniejsza wersja, ale będzie to jeszcze jeden dowód na to, że uogólnienie silni na liczby rzeczywiste, a nawet zespolone, zaproponowane przez Eulera jest właściwe.

Twierdzenie 12.15 (wzór Stirlinga)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)e^x}{x^x\cdot\sqrt{2\pi x}}=1\,.$$

Dowód. Wiemy, że zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Gamma(n+1)e^n}{n^n\cdot\sqrt{2\pi n}}=1$. Niech $0<x\le1$. Udowodnimy, że prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Gamma(x+1+n)e^{n+x}}{(n+x)^{n+x}\cdot\sqrt{2\pi(n+x)}}=1$. Mamy

$$\frac{\Gamma(x+1+n)e^{n+x}}{(n+x)^{n+x}\cdot\sqrt{2\pi(n+x)}}=$$
$$=\frac{(x+n)(x+n-1)\ldots(x+1)x\Gamma(x)}{n!\cdot n^x}\cdot\frac{n!\cdot e^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}\cdot\frac{e^x}{(1+\frac{x}{n})^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}\cdot(1+\frac{x}{n})^x}$$

— kolejne czynniki dążą do 1: pierwszy, bo prawdziwy jest wzór Gaussa, drugi z wzoru Stirlinga dla $n!$, trzeci i czwarty na mocy dobrze znanych twierdzeń.

Przypomnijmy wzór $\sin z=z\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$, prawdziwy dla każdej liczby zespolonej z. Udowodnimy

Twierdzenie 12.16 (wzór na dopełnienie dla funkcji Γ)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\tfrac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Dowód. Z wzoru Weierstrassa wynika, że zachodzą równości:
$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\cdot e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^\infty e^{z/n}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}$ i $\Gamma(1-z)=(-z)\Gamma(-z)=\frac{-z}{-z}\cdot e^{-\gamma(-z)}\prod_{n=1}^\infty e^{(-z)/n}\left(1-\frac{z}{n}\right)^{-1}$.
Wobec tego zachodzą równości
$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^\infty(1-\frac{z^2}{n^2})^{-1}=\left(z\prod_{n=1}^\infty(1-\frac{z^2}{n^2})\right)^{-1}=\pi\left(\pi z\prod_{n=1}^\infty(1-\frac{(\pi z)^2}{n^2\pi^2})\right)^{-1}=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. $\square$

Wniosek 12.17

$\pi=\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})}=\Gamma(\frac12)\Gamma(1-\frac12)=\Gamma(\frac12)^2\Longrightarrow\sqrt{\pi}=\Gamma(\frac12)=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}\mathrm{d}t\ \underset{\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x}{\overset{t=x^2}{=\!=}}\ 2\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$. $\square$

Autor napisał ten tekst będąc pod silnym wpływem książki „Funkcje jednej zmiennej rzeczywistej. Teoria elementarna” N.Bourbaki.

A tearz zajmiemy się funkcją β. Zaczniemy oczywiście od definicji.

Definicja 12.18 (funkcji beta)

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t,\quad x,y>0.\ \square$$

Definicja ta dział dla liczb dodatnich x,y — całka jest zbieżna, ale to założenie jest niezbedne.

Udowodnimy:

Twierdzenie 12.19

Dla dowolnych liczb dodatnich x, y spełniona jest równość $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Lemat 12.20

Dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi wzór $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

Dowód. $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x+1-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \mathrm{d}t \overset{\text{przez}}{\underset{\text{części}}{=\!=}}$

$= \frac{-1}{x+y}(1-t)^{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\Big|_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 (1-t)^{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t = \frac{x}{x+y}\int_0^1 (1-t)^{y-1}t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$ — udało się. $\square$

Dowód. Ustalmy teraz $y > 0$. Niech $f(x) = \beta(x,y)\Gamma(x+y)$. Mamy
$f(x+1) = \beta(x+1,y)\Gamma(x+1+y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)\cdot(x+y)\Gamma(x+y) = xf(x)x$ oraz
$f(1) = \beta(1,y)\Gamma(1+y) = \big(\int_0^1 (1-t)^{1-y}\mathrm{d}t\big)y\Gamma(y) = \Gamma(y)$.
Dodajmy jeszcze, że funkcje $x \mapsto \beta(x,y)$ i $x \mapsto \Gamma(x+y)$ są logarytmicznie wypukłe, a stąd łatwo wynika, że funkcja f też jest logarytmicznie wypukła. Z twierdzenia Bohra wynika więc, że $f(x) = \Gamma(x)\cdot\Gamma(y)$, zatem $\beta(x,y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$. Zakończyliśmy dowód twierdzenia 12.19. $\square$

I jeszcze jeden wniosek.

Wniosek 12.21

$\int_0^{\pi/2}\sin^a x\cos^b x\mathrm{d}x \overset{t=\sin^2 x}{\underset{\mathrm{d}t=2\sin x\cos x\mathrm{d}x}{=\!=\!=\!=}} \frac{1}{2}\int_0^1 t^{a-1)/2}(1-t)^{(b-1)/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\beta(\frac{a}{2},\frac{b}{2}),\ ab > -1.$ $\square$

Zadanie Udowodnić, że jeśli $n \in \mathbb{Z}$ i $n \leqslant 0$, to $\lim\limits_{x\to n}|\Gamma(x)| = \infty$.