Całka Riemanna

Poprawiłem 5 czerwca 2016 r, godz 15:27 – bardzo dziękuję p. Kajetanowi Janiakowi.

Przypomnijmy definicję

Definicja 10.1 (**funkcji całkowalnej w sensie Riemanna**)
Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista I, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeżeli dla $i = 1, 2, \ldots, n$ zachodzą nierówności

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ oraz $x_i - x_{i-1} < \delta$,

to zachodzi też nierówność

$$\left| I - \Big(f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) \Big) \right| < \varepsilon \, .$$

Liczba I nazywana jest wtedy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$ i oznaczana symbolem $\int_a^b f(x)\,dx$. ■

Z tej definicji wynika łatwo, że funkcja f całkowalna w sensie Riemanna jest ograniczona. Jeśli ustalimy punkty $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ dostatecznie drobnego podziału przedziału $[a,b]$, to zmieniając odpowiednio punkt t_i możemy dowolnie zwiększyć wartość bezwzględną składnika $f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ zachowując jednocześnie wszystkie inne punkty (funkcja nieograniczona na całym przedziale $[x_0, x_n]$ musi być nieograniczona na co najmniej jednym z przedziałów $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,..., $[x_{n-1}, x_n]$). Wykazaliśmy więc, że zachodzi

Twierdzenie 10.2 (**o ograniczoności funkcji całkowalnej w sensie Riemanna**)
Funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest ograniczona. ■

Niestety istnieją funkcje ograniczone, które całkowalne w sensie Riemanna nie są. Przyjąwszy np.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}\,; \\ 0, & \text{jeśli } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

otrzymujemy funkcję niecałkowalną w sensie Riemanna, bo wybierając wymierne $t_1, \ldots, t_n$ otrzymujemy

$$f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) = b - a\,,$$

zaś dla niewymiernych $t_1, \ldots, t_n$ otrzymujemy

$$f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) = 0$$

niezależnie od tego jak drobno podzielony został przedział $[a,b]$. Nie ma więc kandydata na całkę. Sformułujemy i udowodnimy twierdzenie charakteryzujące funkcje całkowalne w sensie Riemanna, ale musi to być poprzedzone definicją uogólniającą pojęcie długości przedziału i kilkoma twierdzeniami na ten temat. Zaczniemy od dowodu bardzo ważnego twierdzenia o pokryciach przedziału domkniętego przedziałami otwartymi.

Twierdzenie 10.3 (**o liczbie Lebesgue'a**)
Jeśli $\{I_t\colon \quad t \in T\}$ jest pewną rodziną przedziałów otwartych, która pokrywa przedział domknięty $[a,b]$, tzn. $\bigcup_{t\in T} I_t \supset [a,b]$, to istnieje liczba $\lambda > 0$ taka, że jeśli zbiór $A \subset [a,b]$ ma średnicę mniejszą lub równą niż λ (czyli odległość każdych dwóch punktów zbioru A jest mniejsza lub równa λ), to istnieje $t(A) \in T$ takie, że $A \subset I_{t(A)}$ (mały zbiór musi być zawarty w jakimś, niekoniecznie jednym, elemencie pokrycia przedziałami otwartymi).

Dowód. Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n istnieje zbiór A_n, który nie jest zawarty w żadnym z przedziałów I_t i którego średnica jest mniejsza niż $\frac{1}{n}$. Niech $a_n \in A_n$. Z ciągu (a_n) można wybrać podciąg zbieżny (a_{n_k}). Niech $p = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Niech $p \in I_{t(p)}$ — taki numer $t(p)$ istnieje, bo $\bigcup_{t\in T} I_t \supset [a,b] \ni p$. Ponieważ $I_{(t(p))}$ jest przedziałem *otwartym*, więc istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $(p-\delta, p+\delta) \subset I_{t(p)}$. Dla dostatecznie dużych k mamy $a_{n_k} \in (p-\frac{\delta}{2}, p+\frac{\delta}{2})$. Stąd jednak wynika, że dla każdego $x \in A_{n_k}$ zachodzi nierówność $|x-p| \leq |x-a_{n_k}| + |a_{n_k}-p| < \frac{1}{n_k} + \frac{\delta}{2}$. Oczywiście dla dostatecznie dużych k zachodzi też nierówność $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$ i wobec tego $|x-p| < \delta$. To jednak oznacza, że $A_{n_k} \subset (p-\delta, p+\delta) \subset I_{t(p)}$ wbrew temu, że zbiór A_{n_k} nie jest zawarty w żadnym z przedziałów I_t. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 10.4 *W dowodzie wykorzystywaliśmy jedynie jedną własność przedziału domkniętego, mianowicie to, że z każdego ciągu punktów przedziału domkniętego można wybrać podciąg zbieżny do granicy znajdującej się w* **tym** *przedziale. Własność ta nie przysługuje przedziałom otwartym, np. z ciągu* $(\frac{1}{n+10})$ *punktów przedziału* $(0,1)$ *nie da się wybrać podciągu zbieżnego do granicy leżącej w przedziale* $(0,1)$, *bowiem ciąg ten jest zbieżny do punktu* $0 \notin (0,1)$. *Jest jasne, że zamiast przedziału domkniętego można rozpatrywać dowolny zwarty podzbiór prostej.*

Przypomnijmy, że zbiory zwarte można scharakteryzować np. tak, jak w twierdzeniu poniżej.

Twierdzenie 10.5 (**charakteryzujące podzbiory zwarte** $\mathbb{R}$)
Zbiór $C \subset \mathbb{R}$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony i gdy jego dopełnienie $\mathbb{R} \setminus C$ jest sumą pewnej rodziny przedziałów otwartych. ■

Z tekstu zawartego w uwadze po dowodzie twierdzenia o liczbie Lebesgue'a wynika od razu, że prawdziwe jest

Twierdzenie 10.6 (**o liczbie Lebesgue'a dla zbioru zwartego**)
Jeśli $\{I_t\colon \quad t\in T\}$ jest pewną rodziną przedziałów otwartych, która pokrywa zbiór zwarty C, tzn. $\bigcup\limits_{t\in T} I_t\supset C$, to istnieje taka liczba $\lambda>0$, że jeśli zbiór $A\subset C$ ma średnicę mniejszą lub równą niż λ (czyli odległość każdych dwóch punktów zbioru A jest mniejsza lub równa λ), to istnieje takie $t(A)\in T$, że $A\subset I_{t(A)}$ (mały zbiór musi być zawarty w jakimś, niekoniecznie jednym, elemencie pokrycia przedziałami otwartymi). ■

Definicja 10.7 (**liczby Lebesgue'a**)
Liczba λ, o której mówi powyższe twierdzenie Lebesgue'a nazywana jest liczbą Lebesgue'a pokrycia $\{I_t\colon \quad t\in T\}$ (nie jest więc ona zdefiniowana jednoznacznie, każda liczba dodatnia mniejsza od niej też jest liczbą Lebesgue'a). ■

Z następnego twierdzenia korzystać nie będziemy, jednak włączone jest do tekstu, bo jest bardzo popularne i często używane.

Twierdzenie 10.8 (**Heinego-Borela o pokryciach skończonych**)
Jeśli $\{I_t\colon \quad t\in T\}$ jest pewną rodziną przedziałów otwartych pokrywającą przedział domknięty $[a,b]$, tzn. $\bigcup\limits_{t\in T} I_t\supset [a,b]$, to istnieje taki zbiór *skończony* $T_0\subset T$, że

$$\bigcup_{t\in T_0} I_t\supset [a,b]$$

czyli z każdego pokrycia przedziału domkniętego przedziałami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone tego przedziału.

Dowód. Niech λ oznacza liczbę Lebesgue'a pokrycia $\{I_t\colon \quad t\in T\}$ i niech $n>\frac{b-a}{\lambda}$ będzie liczbą naturalną. Niech $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$ dla $i=0,1,\ldots,n$. Z twierdzenia o liczbie Lebesgue'a wynika, że dla każdego z przedziałów $[x_{i-1},x_i]$ istnieje $t(i)\in T$ takie, że $[x_{i-1},x_i]\subset I_{t(i)}$ dla $i=1,2,\ldots,n$. Stąd wynika, że $[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_{t(i)}$, co kończy dowód. ■

Definicja 10.9 (**dowolnie długiej sumy liczb nieujemnych**)
Niech $\mathcal{A}=\{a_t\colon \quad t\in T\}$ oznacza pewien zbiór złożony z liczb nieujemnych. Piszemy

$$\sum\mathcal{A}=\sum_{t\in T}a_t=\sup\Big\{\sum_{t\in\tilde T}a_t\colon\quad \tilde T\subset T,\qquad \tilde T \text{ –zbiór skończony}\Big\}\quad ■$$

Mówiąc słowami (niedokładnie!): suma dowolnego zbioru liczb dodatnich równa jest kresowi górnemu sum skończenie wielu jego elementów. Niedokładność polega na tym, że sumujemy nie elementy zbioru liczbowego, lecz indeksowane elementy. Jeśli jakaś liczba jest przypisana np. trzem różnym indeksom t, to liczymy ją trzy razy, a nie raz jakby to miało miejsce w przypadku sumowania elementów zbioru.

Jasne jest, że jeśli T oznacza zbiór złożony z kolejnych liczb całkowitych większych od $k-1$, to $\sum\limits_{t\in T} a_t$ jest po prostu sumą szeregu $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$, więc obecna definicja ma jedynie rozszerzyć zakres poprzedniej, która wymagała uporządkowania zbioru numerów liczb dodawanych.

Stwierdzenie 10.10 (**o liczbie składników sumy skończonej**)
Jeśli $\sum\limits_{t\in T} a_t < \infty$, to zbiór indeksów $t\in T\colon\quad a_t>0$ jest skończony lub co najwyżej przeliczalny: $\mathrm{card}(\{t\in T\colon\quad a_t>0\})\le\aleph_0$.*

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy dla pewnej liczby naturalnej n zbiór $T_n := \{t\in T\colon\quad a_t\ge\frac{1}{n}\}$ musi być nieprzeliczalny, więc tym bardziej nieskończony, bo $\{t\in T\colon\quad a_t>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ .Wtedy jednak $+\infty\le\sum_{t\in T_n} a_t\le\sum_{t\in T} a_t$, wbrew założeniu. ■

Stwierdzenie 10.11 (**banalne o długości przedziału**)
Jeśli dla każdego $t\in T$ symbol I_t oznacza przedział dodatniej długości o końcach a_t i b_t oraz $\bigcup\limits_{t\in T} I_t\supset[a,b]$, to $\sum\limits_{t\in T}(b_t-a_t)\ge b-a$.**

Dowód. Wystarczy dowieść, że teza ma miejsce w przypadku $b-a<\infty$, bo półprosta i prosta mogą być przedstawione w postaci sumy wstępującego ciągu przedziałów skończonych. Możemy w tym przypadku założyć, że $\sum\limits_{t\in T}(b_t-a_t)<\infty$, bo w przypadku przeciwnym nic do dowodu nie ma. Jeśli ta suma jest skończona, to zbiór T jest co najwyżej przeliczalny (poprzednie stwierdzenie). Załóżmy że jest on zbiorem liczb naturalnych. Niech $\varepsilon>0$ oznacza dowolną liczbę dodatnią. Niech $J_n=(a_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+2}},b_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+2}})$. Jasne jest, że

$$\sum_n\Big(b_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}-(a_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+2}})\Big)=\varepsilon+\sum_n(b_n-a_n).$$

Wobec tego, że ε oznacza dowolną liczbę dodatnią wystarczy wykazać tezę dla

*symbol $\mathrm{card}(A)$ oznacza liczbę elementów zbioru A, czyli jego moc, używane na innych przedmiotach oznaczenie $|A|$ oznaczać będzie już niedługo miarę zbioru.

**Nie precyzujemy czy przedziały są otwarte domknięte, czy otwarto–domknięte, czy skończone, czy nieskończone, a_t oznacza lewy koniec, b_t — prawy.

rodziny $\{J_n\}$: jeśli $\varepsilon + \sum_n (b_n - a_n) \geq b - a$ dla każdego $\varepsilon > 0$, to również $\sum_n (b_n - a_n) \geq b - a$.

Przedziały J_n są otwarte, więc istnieje taka liczba $\lambda > 0$, że każdy przedział o długości mniejszej niż λ jest zawarty w pewnym przedziale J_n. Załóżmy, że $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ oznaczają takie punkty, że $x_i - x_{i-1} < \lambda$ dla $i = 1, 2 \ldots, m$. Dla każdego i wybieramy numer $n(i)$ w tak, że $[x_{i-1}, x_i] \subset J_{n(i)}$. Wykażemy, że suma długości przedziałów $J_{n(1)}$, $J_{n(2)}$, $\ldots, J_{n(m)}$ jest większa niż $b - a$, z czego teza wyniknie od razu.

Mamy $[x_0, x_1] \subseteq J_{n(1)}$. Niech i_1 będzie największą z tych liczb i, dla których $[x_0, x_i] \subseteq J_{n(1)}$. Ponieważ $J_{n(1)}$ jest przedziałem, więc punkty x_i dla $i > i_1$ znajdują się poza $J_{n(1)}$. Oczywiście $[x_{i_1}, x_{i_1+1}] \subset J_{n(i_1+1)}$. Niech teraz i_2 będzie największym numerem takim, że $[x_{i_1}, x_{i_2}] \subset J_{n(i_1+1)}$. Tak jak poprzednio dla $i > i_2$ punkt x_i znajduje się poza przedziałem $J_{n(i_1+1)}$. Definiując kolejno numery $0 = i_0, i_1$, $i_2, \ldots, i_k$ otrzymujemy ciąg numerów taki, że $[x_{i_{j-1}}, x_{i_j}] \subset J_{n(i_{j-1}+1)}$, $i_k = m$, $x_{i_j+1} \notin J_{n(i_{j-1}+1)}$. Wobec tego liczby $n(i_0+1)$, $n(i_1+1), \ldots$, $n(i_{k-1}+1)$ są **różne**. Liczba $x_{i_j} - x_{i_{j-1}}$ jest mniejsza niż długość przedziału $J_{n(i_{j-1}+1)}$. Wobec tego $b - a = \sum (x_{i_j} - x_{i_{j-1}})$ jest liczbą mniejszą niż suma długości przedziałów $J_{n(i_0+1)}$, $J_{n(i_1+1)}$, $\ldots$, $J_{n(i_{k-1}+1)}$, tu korzystamy z tego, że przedziały $J_{n(i_0+1)}$, $J_{n(i_1+1)}$, $\ldots$, $J_{n(i_{k-1}+1)}$ są **różne** (przedziały $J_{n(1)}$, $J_{n(2)}$, $J_{n(m)}$ nie muszą być różne). Ta zadziwiająco skomplikowana — jak na tak oczywiste stwierdzenie — konstrukcja prowadzi do przypisania przedziałom $[x_{i_{j-1}}, x_{i_j}]$ różnych przedziałów $J_{n(i_{j-1})}$, co pozwala na zastąpienie sumy długości tych pierwszych sumą długości tych drugich. Dowód został zakończony. ■

Osoby, którym wydaje się, że powyższe rozumowanie jest za długie, że to przerost formy nad treścią, zapraszam do jego skrócenia (odrzucając jednak metodę polegającą na opuszczeniu kilku słów lub stwierdzeniu, że teza jest oczywista!).

Teraz możemy wprowadzić zdefiniować miarę (zewnętrzną) zbioru $A \subset \mathbb{R}$.

Definicja 10.12 (**miary zewnętrznej**)
$|A| = \inf_{\{I_t\}} \Big\{ \sum |I_t| \colon \bigcup_{t \in T} I_t \supset A \Big\}$, gdzie I_t oznacza przedział niezdegenerowany a $|I_t|$ — jego długość, czyli różnicę końców. Liczbę $|A|$ nazywamy miarą zewnętrzną zbioru A. ■

Dzięki *stwierdzeniu banalnemu o długości przedziału* definicja ta nie prowadzi do zamieszania w oznaczeniach: Jeśli zbiór A jest przedziałem, to $|A|$ jest jego długością!

Następnym bezpośrednim wnioskiem z definicji miary zewnętrznej jest

Twierdzenie 10.13 (**o monotoniczności miary zewnętrznej**)
Jeśli $A \subseteq B$, to $|A| \le |B|$. ■

Twierdzenie 10.14 (**o podaddytywności miary zewnętrznej**)

Dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ zachodzi nierówność: $\left|\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Dla każdego n istnieje taka rodzina przedziałów $\{I_t\colon \ t \in T_n\}$, że $\bigcup\limits_{t\in T_n} I_t \supset A_n$ i $\sum\limits_{t\in T_n} |I_t| \le |A_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Zdefiniujmy $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$. Jasne jest, że $\bigcup\limits_{t\in T} I_t \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz że

$$\sum_{t\in T}|I_t| = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{t\in T_n}|I_t|\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty}\Big(|A_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}|A_n| + \varepsilon\,.$$

Otrzymana nierówność zachodzi dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$, więc $\left|\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|$, a to chcieliśmy wykazać. ■

Oczywiście chciałoby się stwierdzić, że jeśli zbiory $\{A_n\}$ są parami rozłączne, to $\left|\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|$. Tego niestety nie można udowodnić bez dodatkowych założeń. W tym roku nie będzie nas ta kwestia interesować, zajmiemy się nią w następnym, bo wymaga to większej pracy i znalazło miejsce w programie trzeciego semestru studiów, a do naszych aktualnych celów wystarczy twierdzenie o podaddytywności miary zewnętrznej. Jest natomiast prawdziwe stwierdzenie następujące

Twierdzenie 10.15 (**o przeliczalnej addytywności miary zewnętrznej dla przedziałów**)
Jeśli przedziały I_1, I_2, I_3, ... są parami rozłączne (tzn. $I_k \cap I_l = \emptyset$ dla $k \ne l$), to zachodzi równość: $\big|I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots\big| = \big|I_1\big| + \big|I_2\big| + \big|I_3\big| + \cdots$

Dowód. Nierówność $\big|I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots\big| \le \big|I_1\big| + \big|I_2\big| + \big|I_3\big| + \cdots$ wynika wprost z definicji miary. Jasne jest również, że dla każdego n zachodzi nierówność

$$\big|I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n\big| \le \big|I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots\big| \le \big|I_1\big| + \big|I_2\big| + \big|I_3\big| + \cdots. \qquad (*)$$

Jednak ze stwierdzenia banalnego o długości przedziału wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\big|I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n\big| = \big|I_1\big| + \big|I_2\big| + \cdots + \big|I_n\big|$ ♣ , a stąd

♣ Jeśli rodzina przedziałów (I_t) pokrywa zbiór $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$, to możemy zastąpić przedział I_t przedziałami $I_1 \cap I_t$, $I_2 \cap I_t$, ... $I_n \cap I_t$, oczywiście $|I_1 \cap I_t| + |I_2 \cap I_t| + \ldots + |(I_n \cap I_t)| \le |I_t|$.

$\big|I_1\cup I_2\cup I_3\cup\ldots\big| \geq \big|I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n\big| = \big|I_1\big|+\big|I_2\big|+\cdots+\big|I_n\big| \xrightarrow[n\to\infty]{} \big|I_1\big|+\big|I_2\big|+\big|I_3\big|+\cdots$.
Wobec tego $\big|I_1\cup I_2\cup I_3\cup\ldots\big| \geq \big|I_1\big|+\big|I_2\big|+\big|I_3\big|+\cdots$, co w połączeniu z nierównością (*) dowodzi twierdzenia. ■

Definicja 10.16 (**zbioru miary 0**)
Mówimy, że zbiór A jest zbiorem miary 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $|A|=0$. ■

Z twierdzenia o podaddytywności miary wynika, że suma przeliczalnej rodziny zbiorów miary 0 jest również zbiorem miary 0. Dla rodzin większej mocy to oczywiście nie jest prawdą: każdy niepusty zbiór jest sumą zbiorów jednopunktowych, a nie każdy ma miarę 0, np. $\big|[2,\,5]\big|=3>0$. W szczególności każdy zbiór przeliczalny ma miarę 0, np. $\mathbb{Q}$. Istnieją też nieprzeliczalne zbiory miary 0.

Przykład 10.1 **(zbiór Cantora)**
Opiszemy tzw. zbiór Cantora $\mathcal{C}$. Składa się on z tych liczb z przedziału $[0,1]$, które można zapisać w układzie trójkowym bez użycia cyfry 1. Zbiór ten otrzymujemy usuwając z przedziału $[0,1]$ kolejno przedziały otwarte $(\frac13,\frac23)$, $(\frac19,\frac29)$, $(\frac79,\frac89)$, $(\frac1{27},\frac2{27})$, $(\frac7{27},\frac8{27})$, $(\frac{19}{27},\frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27},\frac{26}{27})$, ... Za każdym razem usuwamy z jakiegoś przedziału jego środkową część, której długość to $\frac13$ długości przedziału, z którego ją usuwamy. Otrzymujemy zbiór, który nie zawiera żadnego przedziału. Liczba $\frac13$ jest jego elementem, chociaż w układzie trójkowym zwykle zapisujemy ją w postaci $0{,}1$. Można ją jednak zapisać w układzie trójkowym jako $0{,}02222222\ldots$, bowiem $\frac29+\frac2{27}+\frac2{81}+\cdots=\frac{2/9}{1-1/3}=\frac13$. Zbiór Cantora jest mocy kontinuum, bo ma dokładnie tyle elementów ile jest ciągów, których elementami są 0 i 2. Jest on miary 0, bo można go pokryć 2^n przedziałami domkniętymi o długościach $\frac1{3^n}$, więc jego miara nie przekracza liczby $\frac{2^n}{3^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. ■

Przykład 10.2 (*zbiór* $\big(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\big)\cap[0,1]$).
Ten zbiór oczywiście nie zawiera żadnego przedziału, bo każdy przedział zawiera liczby wymierne. Jego miara nie może być większa niż miara przedziału $[0,1]$, czyli nie może być większa niż 1. Mniejsza też być nie może, bo

$$1=\big|[0,1]\big|\leq\big|(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]\big|+\big|\mathbb{Q}\cap[0,1]\big|=\big|(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]\big|+0=\big|(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]\big|. \ ■$$

Stwierdzenie 10.17 (**o gęstości dopełnienia zbioru miary** 0)
Jeśli $|A|=0$ i $a<b$, to $(a,b)\setminus A\neq\emptyset$.

Dowód. Niech $\{I_t\colon\ \ t\in T\}$ będzie rodziną przedziałów taką, że $\sum\limits_{t\in T}|I_t|<b-a$ i $\bigcup_{t\in T}I_t\supseteq A$ — taka rodzina istnieje, bo $|A|=0$. Z banalnego stwierdzenia

o długości przedziału wynika, że **nie** jest prawdą, iż $\bigcup_{t\in T} I_t \supseteq [a,b]$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 10.18 (**o postaci otwartych podzbiorów prostej**)
Jeśli zbiór G jest sumą rodziny przedziałów otwartych (być może nieprzeliczalnej), to istnieje taki skończony lub nie ciąg parami rozłącznych przedziałów otwartych $I_1, I_2, \ldots$, że $G = I_1 \cup I_2 \cup \ldots$ Przedziały $I_1, I_2, \ldots$ nazywane są składowymi zbioru G.
Dowód. Niech $p \in G$. Niech J_p będzie maksymalnym przedziałem zawierającym punkt p i zawartym w zbiorze G, tzn. J_p jest sumą wszystkich przedziałów otwartych zawierających punkt p i zawartych w zbiorze G. Jasne jest, że jeśli $p, q \in G$ i $p \neq q$ to albo $J_p = J_q$, albo $J_p \cap J_q = \emptyset$ — suma przedziałów o niepustym przecięciu jest przedziałem. Rodzina $\{J_p\colon \ p \in G\}$ jest co najwyżej przeliczalną, bowiem każdy z tych przedziałów zawiera liczbę wymierną, liczby przypisane różnym przedziałom są różne, bo te przedziały są rozłączne, zatem przedziałów nie może być więcej niż liczb wymiernych, których jest $\aleph_0$. ■

Stwierdzenie 10.19 (**o mierze dopełnienia sumy przedziałów**)
Niech $C \subseteq [a,b]$ będzie sumą skończonej lub przeliczalnej rodziny przedziałów (niekoniecznie otwartych) i niech $D = [a,b] \setminus C$. Wtedy $|C| + |D| = \big|[a,b]\big| = b - a$.
Dowód. Niech $I_1, I_2, I_3, \ldots$ oznaczają przedziały takie, że $C = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$, $i \neq j \implies I_i \cap I_j = \emptyset$. Niech $C_n = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots \cup I_n$ i $D_n = [a,b] \setminus C_n$. Zbiór D_n jest sumą parami rozłącznych przedziałów $J_1, J_2, \ldots, J_{m_n}$, niektóre mogą być jednopunktowe, $m_n \leq n+1$. Z banalnego stwierdzenia o długości przedziału wynika, że $b-a = |I_1|+|I_2|+\cdots+|I_n|+|J_1|+|J_2|+\cdots+|J_{m_n}|$, $|C_n| = |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_n|$, $|D_n| = |J_1| + |J_2| + \cdots + |J_{m_n}|$. Wynika stąd, że dla każdego n zachodzi równość $b - a = |C_n| + |D_n|$. Oczywiście $|C| = |I_1| + |I_2| + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} |C_n|$ i $D = \bigcap_n D_n$, zatem $|D_n| \geq |D|$. Mamy

$$b - a = \big|[a,b]\big| = \big|C \cup D\big| \leq |C| + |D|,$$

oraz

$$b - a = \lim_{n\to\infty} \big[|C_n| + |D_n|\big] = \lim_{n\to\infty} |C_n| + \lim_{n\to\infty} |D_n| = |C| + \lim_{n\to\infty} |D_n| \geq |C| + |D|.$$

Udowodniliśmy, że $|C| + |D| \geq b - a \geq |C| + |D|$. Dowód został zakończony. ■

Wypada w tym miejscu powiedzieć, że twierdzenie to nie jest prawdziwe dla dowolnego zbioru C, ale dla wszystkich, które autor tekstu potrafi zdefiniować nie używając pewnika wyboru, jest prawdziwe. Szczegółami zajmiemy się za niecały rok, a może już za 8 miesięcy.

Następnych kilku twierdzeń nie było na wykładzie, ale zamieszczam je, bo mam nadzieję, że niektórzy z Państwa zechcą je obejrzeć. Dowody są przydługie, ale wszystko zacznie wyglądać nieco lepiej w przyszłym roku, gdy zajmiemy się nieco dokładniej teorią miary.

Lemat 10.20 (**o miarach sum i przecięć monotonicznych ciągów zbiorów mających skończenie wielu składowych**)
Niech każdy ze zbiorów $B_1, B_2, \ldots$ będzie sumą skończenie wielu przedziałów parami rozłącznych. Jeśli $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ i $|B_1| < \infty$, to $\left|\bigcap_n B_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |B_n|$.
Jeśli $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$, to $\left|\bigcup_n B_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |B_n|$.

Dowód. Zaczniemy od pierwszego przypadku. Każda z różnic zbiorów $B_1 \setminus B_2$, $B_2 \setminus B_3$, ... jest sumą skończenie wielu parami rozłącznych przedziałów, niektóre mogą być zdegenerowane do jednego punktu. Niech $B_1 \setminus B_2 = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{k_1}$, $B_2 \setminus B_3 = I_{k_1+1} \cup I_{k_1+2} \cup \ldots \cup I_{k_2}$, ... Przedziały $I_1, I_2, \ldots$ są oczywiście parami rozłączne. Zachodzi równość $B_1 = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) \cup I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{k_1} \cup I_{k_1+1} \cup I_{k_1+2} \cup \ldots$,

więc $\infty > |B_1| \geq \left|I_1 \cup I_2 \cup \ldots\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n|$. Ponieważ

$$B_n = \left(\bigcap_{j=n}^{\infty} B_j\right) \cup I_{k_{n-1}+1} \cup I_{k_{n-1}+2} \cup \ldots \cup I_{k_n} \cup I_{k_n+1} \cup I_{k_n+2} \cup \ldots =$$

$$= \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) \cup I_{k_{n-1}+1} \cup I_{k_{n-1}+2} \cup \ldots \cup I_{k_n} \cup I_{k_n+1} \cup I_{k_n+2} \cup \ldots .$$

więc

$$|B_n| \leq \left|\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right| + |I_{k_{n-1}+1}| + |I_{k_{n-1}+2}| + \ldots + |I_{k_n}| + |I_{k_n+1} + |I_{k_n+2}| + \ldots .$$

Ponieważ $\infty > |B_1| \geq \left|I_1 \cup I_2 \cup \ldots\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n|$,

więc $\lim\limits_{n\to\infty} \Big[|I_{k_{n-1}+1}| + |I_{k_{n-1}+2}| + \ldots + |I_{k_n}| + |I_{k_n+1} + |I_{k_n+2}| + \ldots\Big] = 0$ — reszta szeregu zbieżnego dąży do 0. Stąd wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} |B_n| \leq \left|\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right| + \lim_{n\to\infty} \Big[|I_{k_{n-1}+1}| + |I_{k_{n-1}+2}| + \ldots + |I_{k_n}| + |I_{k_n+1} + |I_{k_n+2}| + \ldots\Big] =$$

$$= \left|\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right| \leq \lim_{j\to\infty} |B_j|,$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} |B_n| \leq \left|\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right| \leq \lim\limits_{n\to\infty} |B_n|$ i w końcu $\lim\limits_{n\to\infty} |B_n| = \left|\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right|$.

Zajmiemy się drugim przypadkiem, chyba nie trudniejszym. Niech $B_1 = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{k_1}$, $B_2 \setminus B_1 = I_{k_1+1} \cup I_{k_1+2} \cup \ldots \cup I_{k_2}$,
$B_3 \setminus B_2 = I_{k_2+1} \cup I_{k_2+2} \cup \ldots \cup I_{k_3}$, ...

Mamy więc

$\bigcup_n B_n = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{k_1} \cup I_{k_1+1} \cup I_{k_1+2} \cup \ldots \cup I_{k_2} \cup I_{k_2+1} \cup I_{k_2+2} \cup \ldots \cup I_{k_3} \cup \ldots$.

Stąd i z twierdzenia o przeliczalnej addytywności miary zewnętrznej wynika, że

$$\Big|\bigcup_n B_n\Big| = \big|I_1\big| + \big|I_2\big| + \ldots + \big|I_{k_1}\big| + \big|I_{k_1+1}\big| + \big|I_{k_1+2}\big| + \ldots + \big|I_{k_2}\big| +$$

$$= \big|I_{k_2+1}\big| + \big|I_{k_2+2}\big| + \ldots + \big|I_{k_3}\big| + \ldots = \lim_{n\to\infty}\Big[\big|I_1\big| + \big|I_2\big| + \ldots + \big|I_{k_n}\big|\Big] = \lim_{n\to\infty}\big|B_n\big|. \ \blacksquare$$

Twierdzenie 10.21 (**o ciągłości miary zewnętrznej,** *słaba wersja*)

Jeśli $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ i zbiory te są otwarte (tzn. każdy jest sumą przedziałów otwartych, być może nieskończenie wielu) i $B_1 \subseteq [a,b]$, to $\lim\limits_{n\to\infty}|B_n| = \big|\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\big|$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Zbiór B_1 można przedstawić jako sumę co najwyżej przeliczalnie wielu przedziałów otwartych parami rozłącznych, jego składowych. Niech $B_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup I_{1,3} \cup \ldots$. Z poprzednio udowodnionych twierdzeń wynika, że $|B_1| = |I_{1,1}| + |I_{1,2}| + |I_{1,3}| + \cdots$. Ponieważ $|B_1| < \infty$, więc istnieje liczba naturalna k_1 taka, że $|I_{1,k_1+1}| + |I_{1,k_1+2}| + |I_{1,k_1+3}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}$. Niech $G_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup I_{1,3} \cup \ldots \cup I_{1,k_1}$. Zbiór G_1 jest sumą skończenie wielu przedziałów, $G_1 \subseteq B_1$ i

$$|B_1 \setminus G_1| = \big|I_{1,k_1+1} \cup I_{1,k_1+2} \cup I_{1,k_1+3} \cup \ldots\big| = |I_{1,k_1+1}| + |I_{1,k_1+2}| + |I_{1,k_1+3}| + \cdots < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Zbiór $B_2 \cap G_1$ jest otwarty, zatem jest sumą co najwyżej przeliczalnie wielu przedziałów otwartych parami rozłącznych. Niech $B_2 \cap G_1 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup I_{2,3} \cup \ldots$. Ponieważ $\infty > |B_2| = |I_{2,1}| + |I_{2,2}| + |I_{2,3}| + \cdots$, więc istnieje taka liczba naturalna k_2, że $|I_{2,k_2+1}| + |I_{2,k_2+2}| + |I_{2,k_2+3}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{4}$. Niech

$$G_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup I_{2,3} \cup \ldots \cup I_{2,k_2} \subseteq B_2 \cap G_1.$$

Mamy więc

$$\big|B_2 \setminus G_2\big| \le \big|B_2 \setminus G_1\big| + \big|B_2 \cap G_1 \setminus G_2\big| \le \big|B_1 \setminus G_1\big| + \big|[B_2 \cap G_1] \setminus G_2\big| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \tfrac{3}{4}\varepsilon.$$

Następnie w taki sam sposób konstruujemy zbiór $G_3 \subseteq B_3 \cap G_2$ taki, że

$$\big|B_3 \setminus G_3\big| < \tfrac{3}{4}\varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{8} = \tfrac{7}{8}\varepsilon.$$

Otrzymujemy taki ciąg zbiorów $G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \ldots$, że $G_n \subset B_n$ oraz $\big|B_n \setminus G_n\big| < (1 - \frac{1}{2^n})\varepsilon$, każdy zbiór G_n to suma skończenie wielu przedziałów, więc również

$$|G_n| \le |B_n| = |G_n \cup B_n \setminus G_n| \le |G_n| + |B_n \setminus G_n| < |G_n| + (1 - \tfrac{1}{2^n})\varepsilon.$$

Wynika stąd, że

$$\lim_{n\to\infty}|G_n| \le \lim_{n\to\infty}|B_n| \le \lim_{n\to\infty}|G_n| + \varepsilon.$$

Ponieważ każdy ze zbiorów $G_1, G_2, \ldots$ ma skończenie wiele składowych, więc (odpowiedni lemat) $\big|\bigcap G_n\big| = \lim\limits_{n\to\infty}|G_n|$. Z tego, że $\bigcap G_n \subseteq \bigcap B_n$ wynika nierówność: $\big|\bigcap G_n\big| \subseteq \big|\bigcap B_n\big|$. Ponieważ $B_j \supseteq \bigcap B_n$, więc $\lim\limits_{j\to\infty}|B_j| \ge \big|\bigcap B_n\big|$. Z tego wszystkiego wynika, że

$\left|\bigcap G_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |G_n| \le \left|\bigcap B_n\right| \le \lim\limits_{n\to\infty} |B_n| \le \lim\limits_{n\to\infty} |G_n| + \varepsilon = \left|\bigcap G_n\right| + \varepsilon \le \left|\bigcap B_n\right| + \varepsilon$.
Wykazaliśmy, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność

$$\left|\bigcap B_n\right| \le \lim_{n\to\infty} |B_n| \le \left|\bigcap B_n\right| + \varepsilon\,,$$

a to oznacza, że $\left|\bigcap B_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |B_n|$. ■

Teraz możemy już sformułować twierdzenie opisujące funkcje całkowalne w sensie Riemanna.

Twierdzenie 10.22 (**charakteryzujące całkowalność w sensie Riemanna**)
Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczona i jej zbiór punktów nieciągłości ma miarę 0. ☒

Przed dowodem tego twierdzenia podamy warunek typu warunku Cauchy'ego dla zbieżności występującej w definicji całki Riemanna i wykażemy, że jest on konieczny i dostateczny dla jej istnienia. Będziemy potrzebować kilku oznaczeń i terminów.

Definicja 10.23
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, punkty $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nazywamy węzłami podziału przedziału $[a,b]$, największą z liczb $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$ nazywamy średnicą podziału;
$m_j = \inf\{f(t)\colon \quad x_{j-1} \le t \le \mathbf{x}_j\}$, $M_j = \sup\{f(t)\colon \quad x_{j-1} \le t \le \mathbf{x}_j\}$;
liczba $\omega_j = M_j - m_j$ oscylacją funkcji f na przedziale $[x_{j-1}, x_j]$;
liczba $\omega_f(x) = \inf\limits_{\delta>0} \left(\sup\limits_{|t-x|\le\delta} f(t) - \inf\limits_{|t-x|\le\delta} f(t) \right)$ nazywana jest oscylacją funkcji f w punkcie x;
suma $\sum\limits_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1})$ nazywana jest sumą górną Darboux funkcji f;
suma $\sum\limits_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1})$ nazywana jest sumą dolną Darboux funkcji f. ■

Zauważmy, że jeśli $x_{i-1} < \hat{x} < x_i$, to zachodzą nierówności

$$\begin{aligned}
&\sup\{f(t)\colon \quad x_{i-1} \le t \le x_i\} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\
&= \sup\{f(t)\colon \quad x_{i-1} \le t \le x_i\} \cdot (\hat{x} - x_{i-1}) + \sup\{f(t)\colon \quad x_{i-1} \le t \le x_i\} \cdot (x_i - \hat{x}) \ge \\
&\ge \sup\{f(t)\colon \quad x_{i-1} \le t \le \hat{x}\} \cdot (\hat{x} - x_{i-1}) + \sup\{f(t)\colon \quad \hat{x} \le t \le x_i\} \cdot (x_i - \hat{x})\,.
\end{aligned}$$

Wykazaliśmy, że jeśli dodamy nowy węzeł, to suma górna nie zwiększy się. Bardzo proste rozumowanie indukcyjne przekonuje nas, że zastąpienie podziału $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ drobniejszym, tzn. dodanie nowych węzłów do $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ zmniejsza górną sumę Darboux lub zachowuje jej wartość. W podobny sposób stwierdzamy, że rozdrabnianie podziału sumę dolną zwiększa lub zachowuje. Wobec tego rozdrabnianie podziału zmniejsza lub zachowuje oscylację na przedziale. Podsumujmy te rozważania:

Lemat 10.24 (o sumach dolnych i górnych)

Jeśli $a = \hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \ldots < \hat{x}_{m-1} < \hat{x}_m = b$ i $a = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_{n-1} < \bar{x}_n = b$ są dwoma podziałami przedziału $[a,b]$, to zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{m}_i(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} \bar{M}_j(\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}),$$

gdzie $\hat{m}_i = \inf\{f(t)\colon \ \hat{x}_{i-1} \leq t \leq \hat{x}_i\}$, $\bar{M}_j = \sup\{f(t)\colon \ \bar{x}_{j-1} \leq t \leq \bar{x}_j\}$, czyli każda dolna suma ma wartość nie większą od każdej sumy górnej, niezależnie od podziałów.

Dowód. Niech $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$ będzie podziałem przedziału $[a,b]$ wyznaczonym przez wszystkie punkty $\hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \ldots < \hat{x}_{m-1} < \hat{x}_m$ oraz $\bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_{n-1} < \bar{x}_n$ — $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$ jest więc wspólnym rozdrobniem obu podziałów. Z uwag poprzedzających dowodzony lemat wynika, że spełnione są nierówności (pomijamy oczywiste definicje m_ι, M_ι)

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{m}_i(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}) \leq \sum_{\iota=1}^{k} m_\iota(x_\iota - x_{\iota-1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{\iota=1}^{k} M_\iota(x_\iota - x_{\iota-1}) \leq \sum_{i=1}^{m} \bar{M}_i(\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}),$$

co w połączeniu z oczywistą nierównością $\sum\limits_{\iota=1}^{k} m_\iota(x_\iota - x_{\iota-1}) \leq \sum\limits_{\iota=1}^{k} M_\iota(x_\iota - x_{\iota-1})$ daje tezę. ■

Następny warunek pełni ważną rolę w dowodach istnienia całki Riemanna: pozwala on wykazywać jej istnienie bez wskazywania wartości całki, podobnie jak warunek Cauchy'ego w wypadku ciągów, szeregów czy funkcji.

Warunek CICR *(typu Cauchy'ego istnienia całki Riemanna)*

Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją takie punkty $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, że

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon. \ ■$$

Twierdzenie 10.25 (o istnieniu całki Riemanna)

Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek CICR.

Dowód. Jeśli funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $x_{j-1} \leq t_j \leq x_j$ i $0 < x_j - x_{j-1} < \delta$ dla

$j = 1, 2 \ldots, n$, to zachodzi nierówność $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum\limits_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Stąd natychmiast wynika, że

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \right| \le \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ i } \ \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) \right| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wobec tego $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j(x_j - x_{j-1}) = \left| \sum\limits_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum\limits_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \right| \le 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$, zatem funkcja f spełnia warunek CICR.

Załóżmy teraz, że funkcja f spełnia warunek CICR. W niejawny sposób zakładamy tu, że funkcja f jest ograniczona, bowiem wszystkie różnice, nieujemne na mocy definicji, $M_1 - m_1$, $M_2 - m_2$, ..., $M_n - m_n$ muszą być skończone dla dostatecznie drobnego podziału, bo $\sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < 1$. Mamy wtedy oczywiście $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} f(t) = \max\limits_{j=1,2,\ldots,n} M_j < \infty$ i $m = \inf\limits_{t \in [a,b]} f(t) = \min\limits_{j=1,2,\ldots,n} m_j > -\infty$.

Niech I będzie kresem dolnym górnych sum Darboux funkcji f dla wszystkich podziałów przedziału $[a, b]$. Z warunku CICR wynika, że I jest kresem górnym dolnych sum Darboux funkcji f. Wykażemy, że liczba I jest całką Riemanna funkcji f.

Załóżmy, że $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ oraz $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ i $0 < x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Z lematu o sumach dolnych i górnych wynika, że wtedy zachodzą nierówności

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \le I \le \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) \ \text{ oraz}$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{n} f(t_i)(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}).$$

Jeśli więc δ jest liczbą dobraną do ε z warunku CIRC, to obie liczby I oraz $\sum\limits_{j=1}^{n} f(t_i)(x_j - x_{j-1})$ leżą w przedziale $\left[\sum\limits_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \sum\limits_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) \right]$, którego długość jest mniejsza od ε, zatem

$$\left| I - \sum_{j=1}^{n} f(t_i)(x_j - x_{j-1}) \right| < \varepsilon,$$

co kończy dowód twierdzenia o istnieniu całki Riemanna. ■

Dowód twierdzenia charakteryzującego całkowalność w sensie Riemanna. Wiemy już, że jeśli funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest ograniczona. Trzeba jeszcze wykazać, że jej zbiór punktów nieciągłości ma miarę 0. Załóżmy, że $\sum_{j=1}^{n} \omega_j(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon$. Niech $\sigma(\alpha)$ będzie sumą tych liczb $x_j - x_{j-1}$, dla których

$\omega_j \geq \alpha$. Zachodzi nierówność $\alpha \cdot \sigma(\alpha) \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_j (x_j - x_{j-1}) < \varepsilon$, zatem $\sigma(\alpha) < \frac{\varepsilon}{\alpha}$.

Niech $\sigma_n(\alpha)$ oznacza sumę długości tych przedziałów z podziału przedziału $[a,b]$ na 2^n równych podprzedziałów, na których oscylacja funkcji f nie jest mniejsza niż α. Z otrzymanej nierówności wynika, że $\sigma_n(\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Stąd natychmiast wynika, że zbiór punktów x, dla których $\omega_f(x) \geq \alpha$ ma miarę 0: węzłów wszystkich podziałów przedziału $[a,b]$ na 2^n podprzedziałów, $n = 1, 2, \ldots$ jest przeliczalnie wiele, więc tworzą one zbiór miary 0. Inne punkty, w których oscylacja nie jest mniejsza niż α znajdują się oczywiście w przedziałach, których suma długości jest mniejsza niż $\sigma_n(a)$ $(\xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$. W ten sposób udowodniliśmy jedną implikację.

Niech teraz $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza funkcję, C — zbiór punktów, w których jest ona ciągła, $D = [a,b] \setminus C$ — zbiór punktów, w których f jest nieciągła i niech dla każdego $x \in [a,b]$ będzie spełniona nierówność $|f(x)| \leq M < +\infty$. Wykażemy, że jeśli $|D| = 0$, to funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna. Możemy oczywiście zakładać, że $M > 0$, bo jeśli $M = 0$, to funkcja f jest tożsamościowo równa 0, więc jest oczywiście całkowalna w sensie Riemanna.

Niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego $x \in C$ istnieje taka liczba $\delta_x > 0$, że jeśli $|t - x| < \delta_x$ i $t \in [a,b]$, to $|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Z definicji zbioru miary 0 wynika, że istnieją przedziały I_1, I_2, ... takie, że $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset D$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \frac{\varepsilon}{5M}$. Rozpatrywane przedziały I_1, I_2, ... mogą być domknięte, otwarto-domknięte, itp. Niech $\tilde{I}_n$ oznacza przedział otwarty, którego środkiem jest środek przedziału I_n i który jest dłuższy od I_n o $\frac{\varepsilon}{20\cdot M\cdot 2^n}$. Oczywiście $\tilde{I}_n \supset I_n$, więc $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n \supset D$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{I}_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|I_n| + \tfrac{\varepsilon}{20\cdot M\cdot 2^n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\varepsilon}{20\cdot M\cdot 2^n} < \tfrac{\varepsilon}{5M} + \tfrac{\varepsilon}{20M} = \tfrac{\varepsilon}{4M}\,.$$

Rodzina $\mathcal{F} = \{(x - \delta_x, x + \delta_x)\colon \quad x \in C)\} \cup \{\tilde{I}_n\colon \quad n \in \mathbb{N}\}$ składa się z przedziałów otwartych, jej suma zawiera przedział $[a,b]$. Wobec tego istnieje taka liczba $\lambda > 0$, że każdy przedział $[c,d] \subset [a,b]$ długości $\leq \lambda$ jest zawarty w którymś elemencie rodziny $\mathcal{F}$. Niech $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ oznacza podział przedziału $[a,b]$ na przedziały długości $< \lambda$. Niech N_C oznacza zbiór złożony z tych numerów $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dla których istnieje punkt $x(j) \in C$ taki, że zachodzi inkluzja $[x_{j-1}, x_j] \subset \big(x(j) - \delta_{x(j)}, x(j) + \delta_{x(j)}\big)$, zaś N_D – zbiór złożony z numerów pozostałych, tj. takich, dla których taki punkt $x(j)$ nie istnieje, zatem istnieć musi liczba $n(j)$ taka, że $[x_{j-1}, x_j] \subset \tilde{I}_{n(j)}$. Jasne jest, że $\displaystyle\bigcup_{j\in N_D} [x_{j-1}, x_j] \subset \bigcup_{j\in N_D} \tilde{I}_n$, zatem

$$\sum_{j\in N_D}\big|[x_{j-1},x_j]\big| = \Big|\bigcup_{j\in N_D}[x_{j-1},x_j]\Big| \le \sum_n |\tilde{I}_n| < \tfrac{\varepsilon}{4M}\,.$$

Dla każdego j zachodzi nierówność $M_j - m_j \le 2M$. Ma więc miejsce nierówność

$$\sum_{j\in N_D}\omega_j(x_j-x_{j-1}) \le 2M\sum_{j\in N_D}(x_j-x_{j-1}) < 2M\cdot\tfrac{\varepsilon}{4M} = \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Jeśli $|t-x|<\delta_x$, $x\in C$, to $|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Stąd wynika, że jeśli $|t-x|<\delta_x$ i $|s-x|<\delta_x$, to $|f(t)-f(s)|\le|f(t)-f(x)|+|f(x)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Stąd wnioskujemy, że dla $j\in N_C$ zachodzi nierówność $M_j-m_j\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Wobec tego:

$$\sum_{j\in N_C}\omega_j(x_j-x_{j-1}) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot\sum_{j\in N_C}(x_j-x_{j-1}) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Możemy więc napisać:

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j(x_j-x_{j-1}) = \sum_{j\in N_D}\omega_j(x_j-x_{j-1}) + \sum_{j\in N_C}\omega_j(x_j-x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Wykazaliśmy więc, że różnica między sumą górną Darboux i sumą dolną Darboux funkcji f jest mniejsza od ε, jeśli tylko przedział $[a,b]$ został podzielony na dostatecznie krótkie podprzedziały, a to oznacza, że funkcja spełnia warunek CICR, czyli że jest całkowalna w sensie Riemanna. ■

Z twierdzenia charakteryzującego funkcje całkowalne i tego, że suma i iloczyn funkcji ograniczonych są funkcjami ograniczonymi oraz z tego że suma dwóch zbiorów miary 0 jest zbiorem miary 0 wynika

Twierdzenie 10.26
Suma i iloczyn funkcji całkowalnych w sensie Riemanna są funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna. ■

Mamy również łatwe do wykazania twierdzonka

Twierdzenie 10.27
$c\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b cf(x)\,dx$ dla dowolnej liczby $c\in\mathbb{R}$ i funkcji $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, która jest całkowalna w sensie Riemanna.

Dowód. Wiedząc, że całka istnieje możemy rozpatrywać podziały przedziału $[a,b]$ np. na n równych części i przyjąć $t_j=x_j$. Wtedy twierdzenie wynika z twierdzenia o granicy ciągu pomnożonego przez liczbę c. ■

Twierdzenie 10.28
$\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ dla dowolnych funkcji $f,g\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, całkowalnych w sensie Riemanna.

Dowód. Całki istnieją, więc możemy rozpatrywać np. podział przedziału $[a,b]$ np. na n równych części i przyjąć $t_j = x_j$. Twierdzenie wynika z twierdzenia o granicy sumy ciągów. ■

Twierdzenie 10.29
Jeśli funkcje $f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna i $f(x) \le g(x)$ dla $a \le x \le b$, to $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Dowód. Całki istnieją, więc możemy rozpatrywać np. podział przedziału $[a,b]$ np. na n równych części i przyjąć $t_j = x_j$. Twierdzenie wynika z twierdzenia o nierównościach dla ciągów. ■

Twierdzenie 10.30
Jeśli funkcje $f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna i $f(x) \le g(x)$ dla $a \le x \le b$, $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$, to miara zbioru $\{x \in [a,b]\colon \quad f(x) < g(x)\}$ jest liczbą dodatnią.

Dowód. Jeśli miara zbioru $D := \{x \in [a,b]\colon \quad f(x) < g(x)\}$ jest równa 0, to dla każdego przedziału $[c,d]$ zbiór $[c,d]\setminus D$ jest niepusty, bo ma miarę $\ge d-c$ — wynika to z podaddytywności miary. Wobec tego w charakterze punktów t_j wystąpić mogą punkty, w których $f(t_j) = g(t_j)$, czyli że odpowiednie sumy Riemanna są równe dla dowolnie drobnego podziału przedziału $[a,b]$. Stąd wynika równość całek, wbrew założeniu. ■

Twierdzenie 10.31
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $a < c < b$, to jest całkowalna w sensie Riemanna na obu przedziałach $[a,c]$ i $[c,b]$ i zachodzi równość $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Dowód. Całkowalność na podprzedziale wynika z całkowalności na przedziale od razu, równość $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ wynika z tego, że można rozważać tylko te podziały przedziału $[a,b]$, w których c pojawia się jako węzeł. ■

Twierdzenie 10.32
Jeśli $f(x) \le g(x)$ dla $a \le x \le b$ i miara zbioru $\{x \in [a,b]\colon \quad f(x) < g(x)\}$ jest dodatnia, funkcje $f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna, to zachodzi nierówność $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$.

Dowód. Niech $D(f)$ oznacza zbiór punktów nieciągłości funkcji f, $D(g)$ – zbiór punktów nieciągłości funkcji g, A — zbiór tych punktów $x \in [a,b]$, dla których $f(x) < g(x)$. Zbiór A **nie** jest miary 0, zbiory $D(f)$ i $D(g)$ są miary 0. Zbiór

$A \setminus \big(D(f) \cup D(g)\big)$ **nie** jest miary 0, więc jest mocy kontinuum*. Niech p będzie dowolnym punktem zbioru $A \setminus \big(D(f) \cup D(g) \cup \{a,b\}\big)$. Mamy $f(p) < g(p)$. Niech α, β będą takimi liczbami, że $f(p) < \alpha < \beta < g(p)$. Obie funkcje f i g są ciągłe w punkcie p, zatem istnieje taki przedział $[c,d] \subset [a,b]$ o środku w punkcie p, że dla $x \in [c,d]$ zachodzi nierówność $f(x) < \alpha < \beta < g(x)$. Mamy więc
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \le \int_a^c f(x)\,dx + \alpha(d-c) + \int_d^b f(x)\,dx <$
$< \int_a^c g(x)\,dx + \beta(d-c) + \int_d^b g(x)\,dx \le \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^d g(x)\,dx + \int_d^b g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$,
co kończy dowód. ■

Twierdzenie 10.33
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to funkcja $|f|$ jest całkowalna w sensie Riemanna i zachodzi nierówność $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Dowód. Całkowalność funkcji $|f|$ wynika z całkowalności funkcji f, bo jeśli f jest ciągła w pewnym punkcie, to $|f|$ też, z ograniczoności f ograniczoność $|f|$ wynika natychmiast. Nierówność wynika od razu z tego, że $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ dla każdego $x \in [a,b]$, więc $-\int_a^b |f(x)| dx \leqslant \int_a^b f(x) \leqslant \int_a^b |f(x)|$. ■

Twierdzenie 10.34
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to jest całkowalna w sensie Riemanna.

Dowód. Funkcja monotoniczna na przedziale *domkniętym* jest ograniczona, zbiór punktów, w których jest nieciągła jest przeliczalny, zatem ma miarę 0. ■

Twierdzenie 10.35
Jeżeli obydwie funkcje $g, f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna, a zbiór $\{x \in [a,b]\colon \quad f(x) \ne g(x)\}$ jest miary 0, to $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

Dowód. Wynika to natychmiast z tego, że całki można potraktować jako granice ciągów sum Riemanna np. dla podziałów na n równych części i tych samych punktów $t_1, t_2, \ldots, t_n$ wybranych w ten sposób, że $f(t_j) = g(t_j)$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. ■

Twierdzenie 10.36 (**o wartości średniej**)
Jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — całkowalna w sensie Riemanna i nieujemna, to istnieje liczba $c \in [a,b]$ taka, że $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.

Dowód. Niech $m = \inf\{f(t)\colon \quad t \in [a,b]\}$, $M = \sup\{f(t)\colon \quad t \in [a,b]\}$. Dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi więc nierówność $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$. Wobec

* Gdyby zbiór $A \setminus (D(f) \cup D(g))$ był miary 0, to zbiór A byłby sumą 3 zbiorów miary 0, więc zbiór A byłby miary 0.

tego

$$m\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b mg(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le\int_a^b Mg(x)\,dx=M\int_a^b g(x)\,dx$$

Jeśli $\int_a^b g(x)\,dx=0$, to przyjmujemy np. $c=\frac{1}{2}(a+b)$. Jeśli $\int_a^b g(x)\,dx\neq 0$, czyli $\int_a^b g(x)\,dx>0$, to otrzymujemy $m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\le M$, a ponieważ funkcja f ma własność Darboux jako ciągła, więc istnieje taka liczba $c\in[a,b]$, że zachodzi równość $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$. Dowód został zakończony. ■

Łatwo można zauważyć, że w przypadku tej wersji twierdzenia o wartości średniej nie da się ominąć założenia ciągłości funkcji f — inaczej niż w wersji z poprzedniej części tego tekstu, gdzie własność Darboux i tak była (pochodna, jeśli istnieje w każdym punkcie przedziału, ma własność Darboux). Funkcja całkowalna w sensie Riemanna własności Darboux mieć nie musi, np. funkcja monotoniczna, która ma punkt nieciągłości.

Niech $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ oznacza funkcję całkowalną w sensie Riemanna. Niech $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Twierdzenie 10.37 (**o ciągłości i różniczkowalności całki**)
Funkcja F spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[a,b]$. Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie $p\in[a,b]$, to funkcja F ma pochodną w punkcie p i zachodzi równość $F'(p)=f(p)$.

Dowód. Funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a,b]$. Niech $M>0$ będzie taką liczbą, że $|f(x)|\le M$ dla każdego $x\in[a,b]$. Niech $a\le x<y\le b$. Mamy

$$|F(y)-F(x)|=\left|\int_a^y f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right|=\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\le$$
$$\le\int_x^y|f(t)|\,dt\le\int_x^y M\,dt=M(y-x).$$

Musimy jeszcze wykazać, że funkcja F jest różniczkowalna w punktach ciągłości funkcji f. Załóżmy, że $p<b$, $0<h<b-p$. Mamy

$$\left|\tfrac{1}{h}\big(F(p+h)-F(p)\big)-f(p)\right|=\left|\tfrac{1}{h}\left(\int_p^{p+h}f(t)\,dt\right)-f(p)\right|=\left|\tfrac{1}{h}\int_p^{p+h}\Big(f(t)-f(p)\Big)\,dt\right|\le$$
$$\le\tfrac{1}{h}\int_p^{p+h}\Big|f(t)-f(p)\Big|\,dt\le\sup_{p\le t\le p+h}\Big|f(t)-f(p)\Big|\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

Ostatnia równość (chodzi o granicę, znaku $=$ nie ma, ale jest strzałka, która go zastępuje) wynika z ciągłości funkcji f w punkcie p, to jedyny moment, w którym ciągłość jest wykorzystywana. Wykazaliśmy, że $f(p)$ jest prawostronną pochodną funkcji F w punkcie p. W taki sam sposób wykazać można, że jest to również pochodna lewostronna, gdy $a<p$. Dowód został zakończony. ■

Zauważmy, że z tego twierdzenia wynika, że funkcja ciągła na przedziale jest pochodną pewnej funkcji różniczkowalnej, tym razem to nie szkic dowodu, lecz dokładne rozumowanie. Przy okazji okazuje się, że w przypadku funkcji ciągłych oba podejścia do całkowania dają ten sam wynik: całka Riemanna równa jest różnicy wartości funkcji pierwotnej. Pozwala to znajdować liczne całki Riemanna. Podkreślić jednak wypada, że istnieją funkcje różniczkowalne, których pochodne są niecałkowalne w sensie Riemanna i oczywiście funkcje, które są całkowalne w sensie Riemanna i nie mają własności przyjmowania wartości pośrednich, więc nie mają funkcji pierwotnych. Jeśli funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna i ma funkcję pierwotną F, to całka $\int_a^b f(x)\,dx$ równa jest różnicy wartości funkcji pierwotnej na końcach przedziału. Wynika to łatwo z twierdzenia o wartości średniej:

$$F(b)-F(a)=\sum_{j=1}^{n}\big(F(x_j)-F(x_{j-1})\big)=\sum_{j=1}^{n}F'(t_j)(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{n}f(t_j)(x_j-x_{j-1})\,.$$

Ostatnia suma jest bliska całce Riemanna funkcji f, bo założyliśmy, że ta funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna. Dodajmy jeszcze, bez dowodu, że funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest różniczkowalna w prawie każdym punkcie, tj. zbiór punktów nieróżniczkowalności funkcji lipschitzowskiej jest miary 0, ale to twierdzenie dosyć daleko wykracza poza program wykładu z analizy.

Twierdzenie 10.38 (o przybliżaniu funkcji całkowalnych funkcjami ciągłymi)
Niech $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka funkcja ciągła $g\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, że

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon \quad\text{i}\quad \inf_{t\in[a,b]}f(t)\le\inf_{t\in[a,b]}g(t)\le\sup_{t\in[a,b]}g(t)\le\sup_{t\in[a,b]}f(t)\,. \qquad \text{(PFC)}$$

Jeśli f jest monotoniczna, ale nie jest stała, to istnieje funkcja ściśle monotoniczna g, dla której spełniona jest powyższa nierówność (PFC).

Dowód.

Niech $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ będzie tak drobnym rozbiciem przedziału $[a,b]$, że $\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j-x_{j-1})\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ dla dowolnego wyboru punktów $t_j\in[x_{j-1},x_j]$ i niech $M=\sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$. Możemy założyć, że $M>0$, dla funkcji zerowej twierdzenie jest oczywiste. Niech $\delta>0$ będzie taką liczbą, że $4(n-1)M\delta<\varepsilon$ oraz $3\delta<x_j-x_{j-1}$ dla $j=1,2,\ldots n$. Niech P_j oznacza przedział domknięty o środku x_j, $j=1,2,\ldots,n-1$ i długości δ. Niech I_1, I_2, $\ldots,I_n$ będą kolejnymi przedziałami, z których składa się zbiór $[a,b]\setminus(P_1\cup P_2\cup\ldots\cup P_{n-1})$. Niech g będzie funkcją określoną na przedziale $[a,b]$, która

(1) jest ciągła,

(2) we wszystkich punktach przedziału I_j przyjmuje wartość m_j ,

(3) jest postaci $ax+b$ na każdym przedziale P_1 , $P_2, \ldots, P_{n-1}$.

Jest jasne, że na każdym z przedziałów I_1 , I_2 , ... , I_n spełniona jest nierówność $f(x) \geq g(x)$, na przedziałach P_1 , P_2 , ... , P_{n-1} — nierówność $|f(x)-g(x)| < 2M$. Mamy więc

$$\tfrac{\varepsilon}{2} > \int_a^b f(x) - \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(f(x)-m_j\big)\,dx \geq \sum_{j=1}^{n} \int_{I_j} \big(f(x)-m_j\big)\,dx =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{I_j} \big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{I_j} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx$$

— jeśli $I=[\alpha,\beta]$, to definiujemy: $\int_I h(x)\,dx = \int_\alpha^\beta h(x)\,dx$.

Mamy też $\sum_{j=1}^{n-1} \int_{P_j} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx \leq 2M(n-1)\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Z dwu ostatnich nierówności i z tego, że

$$\int_a^b \big|f(x)-g(x)\big|\,dx = \int_{I_1} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx + \int_{P_1} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx + \int_{I_2} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx +$$
$$+ \int_{P_2} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx + \cdots + \int_{P_{n-1}} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx + \int_{I_n} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \int_{P_j} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{I_j} \big|f(x)-g(x)\big|\,dx < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

wynika pierwsza część tezy. Z konstrukcji wynika natychmiast, że wszystkie wartości funkcji g znajdują się między kresami funkcji f . Jest również jasne, że jeśli f jest funkcją monotoniczną, to również g jest funkcją monotoniczną.

Wykażemy jeszcze, że jeśli funkcja f jest niemalejąca i nie jest stała, to można znaleźć funkcję ściśle rosnącą g spełniającą nierówności (PFC). W dalszej części rozumowania g oznacza funkcję, którą skonstruowaliśmy poprzednio. Ponieważ f nie jest stała, więc dla dostatecznie małych ε funkcja g również nie jest stała. Niech $c \in [a,b]$ będzie takim punktem, że $g(a) < g(c) < g(b)$. Niech $0 < k < 1$ i niech $g_k(x) = k\big(k(x-c)+g(c)\big) + (1-k)g(x)$. Mamy więc

$$\big|g_k(x)-g(x)\big| = k\big|k(x-c)+g(c)-g(x)\big| \leq k\big(b-a+2M\big) \xrightarrow[k\to 0]{} 0 ,$$

oraz $\quad g_k(b) = k\big(k(b-c)+g(c)\big) + (1-k)g(b) = g(b) + k\big[k(b-c) - \big(g(b)-g(c)\big)\big]$.

Z ostatniej równości i z tego, że $g(b) > g(c)$ wynika, że dla k dostatecznie bliskich 0 zachodzi nierówność $g_k(b) < g(b)$. Analogicznie

$$g_k(a) = k\big(k(a-c)+g(c)\big) + (1-k)g(a) = g(a) + k\Big(\big(g(c)-g(a)\big) - k(c-a)\Big) .$$

Wynika stąd, że dla k dostatecznie bliskich 0 zachodzi nierówność $g_k(a) > g(a)$. Wobec tego dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi nierówność

$$g(a) < g_k(a) \leq g_k(x) \leq g_k(b) < g(b) .$$

Funkcja g_k jest ściśle rosnąca, bo jest sumą funkcji niemalejącej $(1-k)g$ i ściśle rosnącej $k\big(k(x-c)+g(c)\big)$. Ta obserwacja kończy dowód. ■

Wygładzimy uzyskaną funkcję.

Twierdzenie 10.39 (**o przybliżaniu funkcji całkowalnych funkcjami gładkimi**)
Niech $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka funkcja $g\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ klasy C^1 (również klasy C^∞, a nawet wielomian), że

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon \ \text{ i } \inf_{t\in[a,b]}f(t)\le\inf_{t\in[a,b]}g(t)\le\sup_{t\in[a,b]}g(t)\le\sup_{t\in[a,b]}f(t). \qquad \text{(PFG)}$$

Jeśli f jest monotoniczna, ale nie jest stała, to istnieje funkcja ściśle monotoniczna g, dla której spełniona jest powyższa nierówność (PFG).

Dowód. Wskażemy jedynie miejsce, w którym należy nieco zmienić poprzedni dowód, by uzyskać funkcję klasy C^1. Zauważmy, że jeśli

$$\varphi(x)=\begin{cases}3x^2-2x^3 & \text{dla } 0\le x\le 1,\\ 0 & \text{dla } x<0,\\ 1 & \text{dla } x>1,\end{cases}$$

to φ jest funkcją klasy C^1, ściśle rosnącą na przedziale $[0,1]$, bowiem dla $0<x<1$ zachodzi nierówność $\varphi'(x)=6x(1-x)>0$. Niech $c<d$ i $C\ne D$ będą czterema dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Niech $\psi(x)=C+(D-C)\varphi\big(\frac{x-c}{d-c}\big)$. Ponieważ funkcja φ jest klasy C^1, więc funkcja ψ również jest klasy C^1. Zachodzą oczywiste wzory $\psi(c)=C$ oraz $\psi(d)=D$. Funkcja ψ jest ściśle rosnąca na przedziale $[c,d]$, gdy $C<D$ i ściśle malejąca w przeciwnym przypadku. W dowodzie twierdzenia o przybliżaniu funkcji całkowalnych ciągłymi zastępujemy funkcje postaci $ax+b$ funkcjami typu ψ, co czyni konstruowaną tam funkcję g funkcją klasy C^1. Jest ona monotoniczna, gdy f jest monotoniczna. Konstruowana dalej funkcja g_k również jest klasy C^1. Jej pochodna g_k' jest dodatnia (ściśle!) na przedziale $[a,b]$. Dla każdej liczby $\eta>0$ istnieje więc wielomian v taki, że $|g_k(x)-v(x)|<\eta$ dla każdego $x\in[a,b]$. Niech w będzie takim wielomianem, że $w(a)=g_k(a)$ i $w'(x)=v(x)$ dla każdego x. Jasne jest, że $|g_k(x)-w(x)|<\eta(x-a)\le\eta(b-a)$ dla każdego $x\in(a,b]$. Oczywiście w jest funkcją ściśle rosnącą dla dostatecznie małych η, bo $v(x)>0$ dla takich η. Jasne jest też, że jeśli $\varepsilon>0$, to konstrukcja pozwala zdefiniować wielomian w w taki sposób, by $\int_a^b|f(x)-w(x)|\,dx<\varepsilon$. ■

Twierdzenie o przybliżaniu funkcji całkowalnych funkcjami ciągłymi pozwoli nam w przyszłości na przeprowadzanie dowodów w przypadku funkcji ciągłych, a następnie na ogólniejsze wnioski. Przykłady pojawią się wkrótce. Liczbę $\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$

można traktować jako odległość między funkcjami całkowalnymi f i g. Z formalnego punktu widzenia nie jest to najwłaściwsze ze względu na to, że całka z różnicy funkcji przyjmujących te same wartości poza zbiorem miary 0 równa jest 0, więc należałoby najpierw wprowadzić relację równoważności: dwie funkcje są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór tych punktów, w których przyjmują one różne wartości ma miarę 0. Oznacza to, że z takiego punktu widzenia funkcje różniące się np. tylko w punktach wymiernych pewnego przedziału są tą samą funkcją. Po przyjęciu takiej umowy liczba $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ może pełnić rolę odległości. Twierdzenie o przybliżaniu funkcji całkowalnych ciągłymi mówi, że zbiór funkcji ciągłych jest gęsty w zbiorze funkcji całkowalnych. Stwierdzenie to w pewnym sensie przypomina twierdzenie o gęstości liczb wymiernych w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych (w każdym przedziale znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych!).

Lemat 10.40 (**o szacowaniu całki**)
Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją całkowalną w sensie Riemanna, że dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi $|f(x)| \le M$. Załóżmy, że $\big|\{x \in [a,b]\colon \quad |f(x)| > \varepsilon\}\big| < \delta$. Przy tych założeniach

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < M\delta + \varepsilon(b-a)\,.$$

Dowód. Załóżmy, że $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ jest na tyle drobnym podziałem przedziału $[a,b]$, że suma Riemanna z nim związana przybliża całkę $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ z błędem mniejszym niż $\eta > 0$. Niech $|f(t_j)| \le \varepsilon$, jeśli tylko w przedziale $[x_{j-1}, x_j]$ znajduje się taki punkt t_j. Jeśli musieliśmy wybrać t_j tak, że $|f(t_j)| > \varepsilon$, to mamy $|f(t)| > \varepsilon$ dla każdego $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Wobec tego suma długości tych przedziałów jest $< \delta$ a suma pozostałych jest $\le b - a$. Stąd wynika, że $\int_a^b |f(x)|\,dx < M\delta + \varepsilon(b-a)$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 10.41 (**o całkowalności granicy jedn. zbież. ciągu funkcyjnego**)
Jeśli każda z funkcji f_1, f_2, …jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ i $f_n \rightrightarrows f$, to również funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna i zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dowód. Niech D_n będzie zbiorem punktów nieciągłości funkcji f_n. Jego miarą jest 0, bo funkcja f_n jest całkowalna w sensie Riemanna. Wobec tego zbiór $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

jest też miary 0 jako suma przeliczalnej rodziny zbiorów miary 0. Jeśli $p \in [a,b] \setminus D$, to wszystkie funkcje f_1, f_2,... są ciągłe w punkcie p, zatem — na mocy twierdzenia o ciągłości granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego — funkcja f również jest ciągła w tym punkcie. Ciąg (f_n) spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, zatem dla dostatecznie dużych liczb naturalnych k, n zachodzi nierówność $|f_n(x) - f_k(x)| < 1$, wobec tego $1 \geq \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f_k(x)| = |f(x) - f_k(x)|$. Ponieważ funkcja f_k jest całkowalna w sensie Riemanna, więc jest ograniczona. Wobec tego również funkcja f jest ograniczona: $|f(x)| \leq |f_k(x)| + 1$. Wykazaliśmy więc, że funkcja f jest ograniczona i że jej zbiór punktów nieciągłości ma miarę 0, więc jest całkowalna w sensie Riemanna.

Niech ε będzie liczbą dodatnią. Niech m będzie tak dużą liczbą naturalną, że $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ dla każdego $x \in [a,b]$. Wobec tego na mocy lematu o oszacowaniu całki zastosowanego do funkcji $f_m - f$ mamy

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_m(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_m(x)|\,dx \leq (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon\,. \blacksquare$$

Przechodzenie do granicy pod znakiem całki jest ważne w wielu sytuacjach. Podamy jeszcze jedno twierdzenie, które w ogólniejszej wersji nazywane jest twierdzeniem Lebesgue'a.

Twierdzenie 10.42 (**o zbieżności zmajoryzowanej**) (poza programem AMI)
Załóżmy, że funkcje $f, f_1, f_2, \ldots$ określone na przedziale $[a,b]$ są całkowalne w sensie Riemanna oraz że $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dla $x \in [a,b] \setminus S$, $|S| = 0$ i że istnieje taka liczba $M > 0$, że dla każdej liczby $x \in [a,b]$ zachodzą wszystkie nierówności $M \geq |f(x)|, |f_1(x)|, |f_2(x)|, \ldots$. Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Dowód. Niech D będzie zbiorem złożonym ze wszystkich punktów, w których co najmniej jedna z funkcji $f, f_1, f_2, \ldots$ jest nieciągła oraz z tych punktów x, dla których nie jest prawdą, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Zbiór D jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów miary 0, więc $|D| = 0$. Niech $C = [a,b] \setminus D$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $A_n = \{x \in C\colon\ \exists_{k\geq n} |f_k(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\}$. Niech $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ będą takimi zbiorami, że $A_n \subseteq B_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$, B_n jest zbiorem otwartym, tzn. jest sumą przedziałów otwartych i jeśli $x \in B_n$ to istnieje $k \geq n$ takie, że $|f_k(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Zbiory A_n można powiększyć do zbiorów B_n, bo funkcje $f, f_1, f_2, \ldots$ są ciągłe w każdym punkcie zbioru C, a nierówność występująca w definicji zbioru A_n jest ostra (więc jeśli jest spełniona w jakimś punkcie x, to również we wszystkich punktach dostatecznie krótkiego przedziału o środku w punkcie x). Niech $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Jasne jest, że jeśli $x \in B$, to dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$

zachodzi nierówność $|f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Stąd wynika, że jeśli $x \in B$, to **NIE** jest prawdą, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Wobec tego $|B| = 0$. Z twierdzenia o ciągłości miary zewnętrznej wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} |B_n| = 0$. Istnieje więc taka liczba $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|B_n| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Stosując lemat o oszacowaniu całki stwierdzamy, że

$$\left| \int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,dx\right| \le \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon\,.$$

Z definicji granicy ciągu wynika więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx\right| = 0$. Stąd od razu wnioskujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Dowód został zakończony. ■

Zadanie: Niech $f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i niech $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dla $x \in [a,b] \setminus D$, $|D| = 0$. Niech $f, f_1, f_2, \ldots$ będą funkcjami ciągłymi w każdym punkcie $x \in [a,b] \setminus D$. Udowodnić, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór C_ε taki, że $\big|[a,b] \setminus C_\varepsilon\big| < \varepsilon$ i $f_n \rightrightarrows f$ na C_ε.

Zadanie: Niech $\alpha(x) = e^{-1/[x(1-x)]}$ dla $x \in (0,1)$ oraz $\alpha(x) = 0$ dla $x \notin (0,1)$. Udowodnić, że funkcja α jest klasy C^∞. Niech β będzie funkcją pierwotną funkcji α. Wykazać, że istnieją stałe $c_1 \in \mathbb{R}$ i $c_2 > 0$ takie, że $c_1 + c_2\beta(x) = 0$ dla każdego $x < 0$ i $c_1 + c_2\beta(x) = 1$ dla każdego $x > 1$.