Funkcja wykładnicza, kosinus i sinus

Tekst poprawiony 15 lutego 2014, 0:35

W dalszej części wykładu wygodnie jest użyć liczb zespolonych znanych już studentom z wykładu algebry liniowej. Przypomnieć wypada, że liczbami zespolonymi nazywamy uporządkowane pary liczb rzeczywistych, które można w naturalny sposób identyfikować z punktami płaszczyzny. Będziemy standardowo przyjmować, że $z = x + yi$, $z_n = x_n + y_n i$ zakładając, że $x, y, x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

Przypomnieć wypada, że jeśli $z \in \mathbb{C}$ i $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, to piszemy $\mathrm{Re}(z) = x$ oraz $\mathrm{Im}(z) = y$. Piszemy też $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wartość bezwzględna to tak jak w przypadku liczb rzeczywistych odległość punktu z od punktu 0. Liczby zespolone można dodawać i mnożyć. Są spełnione wszystkie pewniki z listy podanej dla liczb rzeczywistych z wyjątkiem tych, w których występuje nierówność. W zbiorze liczb zespolonych nierówności zgodnej z działaniami wprowadzić nie można, bo gdyby to się udało, to wszystkie niezerowe kwadraty okazałyby się dodatnie, więc zarówno $-1 = i^2$ jak i $1 = 1^2$ byłyby liczbami dodatnimi, ale ich suma, równa 0, dodatnia by nie była.

Zachodzi natomiast nierówność trójkąta: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dla dowolnych liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Jej druga wersja to $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$. Trójkąt, o którym można pomyśleć (druga wersja) ma wierzchołki $z_1, 0, z_2$. Nierówność $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$ jest ostra chyba, że jeden z punktów z_1, z_2 leży między drugim z nich i punktem 0. Nie dowodzimy wszystkich tych stwierdzeń bo ich łatwe dowody pojawiły się z pewnością na zajęciach z algebry liniowej.

Przed podaniem następnych przykładów i twierdzeń zajmiemy się przez chwilę ciągami i szeregami liczb zespolonych.

Twierdzenie 4.1 (granicy ciągu liczb zespolonych)
Liczba zespolona z jest granicą ciągu liczb zespolonych (z_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n_ε taka, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|z_n - z| < \varepsilon$. ■

Jak widać definicja granicy jest dokładnie taka sama jak w przypadku liczb rzeczywistych. Jasne jest, że $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$. Nie możemy jednak mówić o ciągach monotonicznych, bo w zbiorze liczb zespolonych nie da się zdefiniować nierówności zgodnej z dodawaniem i mnożeniem. Twierdzenia, definicje itp., które nie są związane z monotonicznością, można przenieść na ogół bez żadnych zmian na przypadek zespolony.

Stwierdzenie 4.2

Ciąg (z_n) jest zbieżny do liczby z wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i jednocześnie $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Dowód. Zachodzą nierówności $|z_n - z| = \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2} \geq |x_n - x|$ i $|z_n - z| = \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2} \geq |y_n - y|$.* Wobec tego z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że jeśli $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, to $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, co kończy dowód stwierdzenia w jedną stronę. Jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, to $0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2} = \lim_{n\to\infty} |z_n - z|$, więc $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. ■

Z nierówności $|x_n - x| \leq |z_n - z|$, $|y_n - y| \leq |z_n - z|$ i $|z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$ wynika

Stwierdzenie 4.3

Ciąg (z_n) spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy oba ciągi (x_n), (y_n) spełniają warunek Cauchy'ego. ■

Wobec tego, podobnie jak w przypadku rzeczywistym, prawdziwe jest bardzo ważne

Stwierdzenie 4.4

Ciąg (z_n) ma granicę (skończoną) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek Cauchy'ego. ■

Z tego banalnie wyglądającego stwierdzenia wynika, że twierdzenia o szeregach bezwzględnie zbieżnych są prawdziwe również w przypadku szeregów o wyrazach zespolonych.

Przykład 4.1 Niech z oznacza dowolną liczbę zespoloną. Udowodnimy teraz bezpośrednio, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ jest bezwzględnie zbieżny. Zastosujemy kryterium ilorazowe d'Alemberta do szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right|$ w przypadku $z \neq 0$, w przypadku $z = 0$ nasz szereg ma wyrazy nieujemne: $1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$, więc jest zbieżny bezwzględnie. Zachodzi wzór $\left(\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|\right) \Big/ \left(\left|\frac{z^n}{n!}\right|\right) = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$, zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right|$ jest zbieżny dla każdego $z \neq 0$, co oznacza, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ jest zbieżny bezwzględnie. Wykażemy, że dla dowolnych liczb zespolonych z, w zachodzi równość $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$. Zastosujemy oczywiście twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów. Mamy

$\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) \cdot \left(1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \ldots\right) =$

*Odległość między rzutami na oś nie przekracza odległości między rzutowanymi punktami.

$$= 1 + \left(\tfrac{z}{1!} + \tfrac{w}{1!}\right) + \left(\tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z}{1!}\cdot\tfrac{w}{1!} + \tfrac{w^2}{2!}\right) + \left(\tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^2}{2!}\cdot\tfrac{w}{1!} + \tfrac{z}{1!}\cdot\tfrac{w^2}{2!} + \tfrac{w^3}{3!}\right) + \dots =$$

$$\overset{\text{dwumian Newtona}}{=\!=\!=\!=\!=} 1 + \tfrac{z+w}{1!} + \tfrac{(z+w)^2}{2!} + \tfrac{(z+w)^3}{3!} + \dots . \ \blacksquare$$

Wypada stwierdzić, że w licznych podręcznikach liczba e^x jest definiowana jako suma szeregu nieskończonego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Postąpiliśmy inaczej głównie ze względu na to, że ta definicja, którą podaliśmy wcześniej, $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, może być na tym poziomie zaawansowania łatwiej powiązana z zastosowaniami i to w zrozumiały sposób. Nadmienić wypada, że po ostatnim przykładzie niewiele już zostało do zrobienia, by otrzymać wszystkie własności funkcji wykładniczej na drodze tu opisanej. Dobrym i jednocześnie prostym ćwiczeniem byłoby wykazanie nierówności $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1+x$ dla ujemnych liczb rzeczywistych x za pomocą operacji na szeregach.

Teraz zajmiemy się funkcją wykładnicza o podstawie e i zespolonym wykładniku.

Lemat 4.5 (zespolony o granicach n-tych potęg ciągów „szybko zbieżnych” do 1)

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot z_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + z_n)^n = 1$.

Dowód. Wykażemy, że zachodzi nierówność $|(1+z)^n - 1| \leq (1 + |z|)^n - 1$ korzystając z dwumianu Newtona i nierówności trójkąta. Zachodzą wzory:

$$|(1+z)^n - 1| = \left|1 + \tbinom{n}{1}z + \tbinom{n}{2}z^2 + \dots + \tbinom{n}{n-1}z^{n-1} + z^n - 1\right| \leq$$

$$\leq \tbinom{n}{1}|z| + \tbinom{n}{2}|z|^2 + \dots + \tbinom{n}{n-1}|z|^{n-1} + |z|^n = (1 + |z|)^n - 1 .$$

Ponieważ założyliśmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot z_n = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot |z_n| = 0$ i wobec tego, że zachodzi nierówność $|(1+z_n)^n - 1| \leq (1 + |z_n|)^n - 1$, a to ostatnie wyrażenie ma granicę 0 przy $n \longrightarrow \infty$, na mocy rzeczywistego lematu o potęgach ciągów szybko zbieżnych do 1, więc lemat zespolony wynika natychmiast z twierdzenia o trzech ciągach. $\blacksquare$

Teraz czeka nas dowód istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n$. Musi on się różnić od dowodu w przypadku rzeczywistym, bo o żadnej monotoniczności tym razem mówić nie możemy, bo to pojęcie nie stosuje się do liczb nierzeczywistych. Zamiast niego wykorzystamy twierdzenie Cauchy'ego, wg. którego ciąg liczbowy spełniający warunek Cauchy'ego ma granicę skończoną.

Lemat 4.6 (o zbieżności ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n$)

Ciąg $\left((1 + \frac{z}{n})^n\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny.

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $n > m \geq k \geq 0$, to $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} < \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$.Wynika to natychmiast z tego, że

$$\binom{m}{k}\frac{1}{m^k}=\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k k!}=\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\cdot\frac{1}{k!}\,,$$

wobec tego zastępując w tym wzorze m przez $n>m$ zwiększamy mianowniki zachowując liczniki bez zmian, co oczywiście powoduje wzrost mnożonych ułamków. Mamy zatem

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-\left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| = \left|1+\binom{n}{1}\frac{z}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2+\cdots+\binom{n}{n-1}\left(\frac{z}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{z}{n}\right)^n-\right.$$

$$\left.-\left(1+\binom{m}{1}\frac{z}{m}+\binom{m}{2}\left(\frac{z}{m}\right)^2+\cdots+\binom{m}{m-1}\left(\frac{z}{m}\right)^{m-1}+\left(\frac{z}{m}\right)^m\right)\right|\le$$

$$\le[1-1]+\left[\binom{n}{1}\frac{1}{n}-\binom{m}{1}\frac{1}{m}\right]|z|+\left[\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}-\binom{m}{2}\frac{1}{m^2}\right]|z|^2+\cdots+\left[\binom{n}{m}\frac{1}{n^m}-\binom{m}{m}\frac{1}{m^m}\right]|z|^m+$$

$$+\binom{n}{m+1}\frac{1}{n^{m+1}}|z|^{m+1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}}|z|^{n-1}+|z|^n=\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n-\left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m.$$

Ponieważ ciąg $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$ jest zbieżny (liczba $|z|$ jest rzeczywista!), więc spełnia on warunek Cauchy'ego, wobec tego również ciąg $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego – wykazaliśmy bowiem, że odległości między wyrazami tego ostatniego nie przekraczają odległości odpowiednich wyrazów ciągu $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$. Lemat został dowiedziony. ■

Definicja 4.7 (zespolonej funkcji wykładniczej o podstawie e)

$$e^z:=\exp(z):=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.\ ■$$

Twierdzenie 4.8 (o podstawowych własnościach funkcji zespolonej exp)

c1. Dla dowolnych liczb zespolonych z,w zachodzi równość

$$\exp(z+w)=\exp(z)\cdot\exp(w)\,.$$

c2. Dla dowolnego ciągu (z_n) liczb zespolonych różnych od 0 zbieżnego do 0 zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\exp(z_n)-1}{z_n}=1\,.$$

Dowód. Własność **c1** wynika z lematu zespolonego o granicach n–tych potęg ciągów szybko zbieżnych do 1 w dokładnie taki sam sposób jak w przypadku rzeczywistym. Dla dowodu własności **c2** skorzystamy z własności rzeczywistej funkcji exp i wykazanej w dowodzie lematu o zbieżności ciągu $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ nierówności w przypadku $n>m=1$ zakładając, że $|z|<1$:

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-(1+z)\right|\le\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n-(1+|z|)\le\exp(|z|)-(1+|z|)\le$$

$$\le\frac{1}{1-|z|}-(1+|z|)=\frac{|z|^2}{1-|z|}$$

Mamy więc $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-(1+z)\right| \le \frac{|z|^2}{1-|z|}$. Stąd przechodząc do granicy przy $n\to+\infty$ otrzymujemy w przypadku $0<|z|<1$ nierówność $|\exp(z)-(1+z)| \le \frac{|z|^2}{1-|z|}$, z której własność **c2** wynika od razu: $\left|\frac{\exp(z)-1}{z}-1\right| = \left|\frac{\exp(z)-(1+z)}{z}\right| \le \frac{|z|}{1-|z|}$. ■

Wniosek 4.9 (o ciągłości funkcji exp)
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(z_n) = \exp(z)$.

Dowód. $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(z_n) = \exp(z) + \exp(z)\cdot \lim\limits_{n\to\infty}(z_n - z)\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\exp(z_n-z)-1}{z_n-z} =$
$= \exp(z)+\exp(z)\cdot 0\cdot 1 = \exp(z)$. ■

Twierdzenie 4.10 (o jednoznaczności funkcji zespolonej exp)
Jeśli funkcja $f\colon\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ spełnia warunki

c1 dla dowolnych liczb zespolonych z,w zachodzi równość $f(z+w)=f(z)f(w)$,

c2 dla dowolnego ciągu (z_n) liczb zespolonych różnych od 0 zbieżnego do 0 zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-1}{z_n}=1$,

to dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość $f(z)=\exp(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Dowód. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n\neq 0$. Dla dostatecznie dużych n mamy $(1+\frac{z}{n})^n\neq 0$. Mamy też $f(z)=\left[f\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n$. Wobec tego

$$\frac{f(z)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(\frac{z}{n})-1-\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n = 1\,,$$

bo $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(f(\frac{z}{n})-1-\frac{z}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(z\frac{f(\frac{z}{n})-1}{\frac{z}{n}}-z\right) = z\cdot 1 - z = 0$, więc możemy skorzystać z lematu o potęgach ciągów zespolonych szybko zbieżnych do 1, biorąc pod uwagę też to, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)=1$.

Uogólnimy nieco twierdzenie o jednoznaczności funkcji wykładniczej.

Twierdzenie 4.11 (o jednoznaczności zespolonej funkcji wykładniczej)
Jeśli funkcja $f\colon\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ spełnia warunki

c1 dla dowolnych liczb zespolonych z,w zachodzi równość $f(z+w)=f(z)f(w)$,

c2 dla dowolnego ciągu (z_n) liczb zespolonych różnych od 0 zbieżnego do 0 zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-1}{z_n}=A\,,$$

to dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość $f(z)=\exp(Az)=e^{Az}$.

Dowód. Możemy powtórzyć dowód poprzedniej wersji twierdzenia, jednak postąpimy nieco inaczej. Zdefiniujemy pomocniczą funkcję $g(z)=f(\frac{z}{A})$, jeśli $A\neq 0$. Mamy

$$g(z+w)=f\left(\tfrac{z+w}{A}\right)=f\left(\tfrac{z}{A}+\tfrac{w}{A}\right)=f\left(\tfrac{z}{A}\right)\cdot f\left(\tfrac{w}{A}\right)=g(z)\cdot g(w)\,.$$

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ i $z_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{g(z_n)-1}{z_n} = \tfrac{1}{A} \cdot \lim_{n\to\infty} \tfrac{f(z_n/A)-1}{z_n/A} = \tfrac{1}{A} \cdot A = 1\,.$$

Wobec tego dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość $e^z = g(z)$. Stąd wynika od razu, że $f(z) = f\big(\frac{Az}{A}\big) = g(Az) = e^{Az}$.

Pozostał przypadek $A = 0$. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z}{n} = 0$ i $z_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\frac{z}{n})-1}{\frac{z}{n}} = A = 0$ Z lematu zespolonego o granicach potęg ciągów szybko zbieżnych do 1 wynika, że $f(z) = \big[f\big(\frac{z}{n}\big)\big]^n = \big[1 + \frac{f(\frac{z}{n})-1}{\frac{z}{n}}\frac{z}{n}\big]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, a to oznacza, że dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość $f(z) = 1 = e^{0\cdot z}$. ■

Twierdzenie 4.12 (kilka następnych własności funkcji zespolonej exp)

c3. $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ dla każdej liczby zespolonej z.

c4. Jeśli $y \in \mathbb{R}$, to $\overline{\exp(iy)} = \exp(-iy)$.

c5. Jeśli $y \in \mathbb{R}$, to $|\exp(iy)| = 1$.

c6. $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re} z) \leq \exp(|z|)$ dla każdej liczby zespolonej z.

c7. Jeśli $y \in \mathbb{R}$, to $|\exp(iy) - 1| \leq |y|$

Dowód. Mamy

$$\exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} \big(1 + \tfrac{\overline{z}}{n}\big)^n = \lim_{n\to\infty} \overline{\big(1 + \tfrac{z}{n}\big)^n} = \overline{\lim_{n\to\infty} \big(1 + \tfrac{z}{n}\big)^n} = \overline{\exp(z)}\,.$$

Wykazaliśmy **c3**. Z tej własności **c4** wynika przez podstawienie, a następna własność wynika stąd, że

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy) \cdot \overline{\exp(iy)} = \exp(iy) \cdot \exp(-iy) = \exp(iy + (-iy)) = \exp(0) = 1\,.$$

Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ i $z = e^{x+iy}$, to $|z| = \big|e^{x+iy}\big| = \big|e^x\big| \cdot \big|e^{iy}\big| = e^x$; oznacza to, że wartość bezwzględna potęgi o wykładniku zespolonym i podstawie e zależy jedynie od części rzeczywistej wykładnika, część urojona wykładnika ma wpływ jedynie na argument potęgi. Własność **c6.** została udowodniona.

Wykażemy **c7**. Mamy

$$|\exp(ix) - 1| = \big|\big(\exp(i\tfrac{x}{n})\big)^n - 1\big| =$$

$$= \Big|\exp(i\tfrac{x}{n}) - 1\Big| \cdot \Big|\exp\Big(\tfrac{(n-1)}{n}ix\Big) + \exp\Big(\tfrac{(n-2)}{n}ix\Big) + \cdots + \exp\Big(\tfrac{1}{n}ix\Big) + 1\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\exp(i\tfrac{x}{n}) - 1\Big| \cdot \Big(\Big|\exp\tfrac{(n-1)}{n}ix\Big| + \Big|\exp\tfrac{(n-2)}{n}ix\Big| + \cdots + \Big|\exp\tfrac{1}{n}ix\Big| + 1\Big) =$$

$$= n\Big|\exp(i\tfrac{x}{n}) - 1\Big| = \Big|ix\frac{\exp(i\frac{x}{n}) - 1}{i\frac{x}{n}}\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

W ostatnim przejściu granicznym skorzystaliśmy oczywiście z własności **c2**. W ten sposób zakończyliśmy dowód. ■

Definicja 4.13 (funkcji sinus i kosinus)

Dla każdej liczby zespolonej z definiujemy

$$\sin z = \tfrac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right), \qquad \cos z = \tfrac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right). \ \blacksquare$$

Twierdzenie 4.14 (wzór Eulera)

$e^{iz} = \exp(iz) = \cos z + i\sin z$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

Wzór ten jest natychmiastową konsekwencją definicji sinusa i kosinusa. ■

Twierdzenie 4.15 (podstawowe własności funkcji trygonometrycznych)

t0. $\cos y \in \mathbb{R}$ oraz $\sin y \in \mathbb{R}$ dla każedego $y \in \mathbb{R}$.

t1. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ dla każdej liczby zespolonej z.

t2. $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$.

t3. $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$.

t4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = 1$ dla każdego ciągu (z_n) liczb zespolonych różnych od 0, zbieżnego do 0.

Dowód. Ponieważ $\overline{\exp(iy)} = \exp(-iy)$ (własność **c4**), więc jeśli y jest liczbą rzeczywistą, to $\cos y = \frac{1}{2}\left(\exp(iy) + \exp(-iy)\right) = \frac{1}{2}\Big(\exp(iy) + \overline{\exp(iy)}\Big) = \mathrm{Re}\left(\exp(iy)\right)$ oraz $\sin y = \frac{1}{2i}\left(\exp(iy) - \exp(-iy)\right) = \frac{1}{2i}\Big(\exp(iy) - \overline{\exp(iy)}\Big) = \mathrm{Im}\left(\exp(iy)\right)$ też są liczbami rzeczywistymi. Własność **t0** jest udowodniona.

$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right)\right)^2 =$
$= \frac{1}{4}\big(\exp(2iz) + \exp(-2iz) + 2\exp(iz - iz)\big) - \frac{1}{4}\big(\exp(2iz) + \exp(-2iz) - 2\exp(iz - iz)\big) =$
$= \frac{1}{4}\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(-2) = 1$. Własność **t1** jest udowodniona.

$$\begin{aligned}
\cos z\cos w - \sin z\sin w &= \tfrac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(\exp(iw) + \exp(-iw)\right) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right)\cdot\tfrac{1}{2i}\left(\exp(iw) - \exp(-iw)\right) = \\
&= \tfrac{1}{4}\big(\exp(i(z+w)) + \exp(i(z-w)) + \exp(i(-z+w)) + \exp(i(-z-w))\big) + \\
&\quad + \tfrac{1}{4}\big(\exp(i(z+w)) - \exp(i(z-w)) - \exp(i(-z+w)) + \exp(i(-z-w))\big) = \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\exp(i(z+w)) + \exp(i(-z-w))\big) = \cos(z+w).
\end{aligned}$$

Udowodniliśmy własność **t2.**

$$\begin{aligned}
\sin z\cos w + \cos z\sin w &= \tfrac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(\exp(iw) + \exp(-iw)\right) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right)\cdot\tfrac{1}{2i}\left(\exp(iw) - \exp(-iw)\right) = \\
&= \tfrac{1}{4i}\big(\exp(i(z+w)) + \exp(i(z-w)) - \exp(i(-z+w)) - \exp(i(-z-w))\big) + \\
&\quad + \tfrac{1}{4i}\big(\exp(i(z+w)) - \exp(i(z-w)) + \exp(i(-z+w)) - \exp(i(-z-w))\big) = \\
&= \tfrac{1}{2i}\big(\exp(i(z+w)) - \exp(i(-z-w))\big) = \sin(z+w).
\end{aligned}$$

Udowodniliśmy własność **t3.**

Dowiedziemy prawdziwość własności **t4**: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin z_n}{z_n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\exp(iz_n) - \exp(-iz_n)}{2iz_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{\exp(iz_n) - 1}{iz_n} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\exp(-iz_n) - 1}{-iz_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \ \blacksquare$$

Można wykazać, że własności **t1** – **t4** definiują parę funkcji złożoną z kosinusa i sinusa. Zachęcamy do samodzielnego udowodnienia tego stwierdzenia zarówno w przypadku rzeczywistych jak i zespolonym.

Twierdzenie 4.16 (kilka następnych własności sinusa i kosinusa)

t5. $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ dla każdej liczby zespolonej z.

t6. $\sin z \pm \sin w = 2\sin\frac{z\pm w}{2}\cos\frac{z\mp w}{2}$, $\cos z + \cos w = 2\cos\frac{z+w}{2}\cos\frac{z-w}{2}$, $\cos z - \cos w = -2\sin\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2}$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$.

t7. $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$, $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

t8. Jeśli $0 < y \le 2$, to $\sin y > 0$. Jeśli $0 \le y \le 1$, to $\cos y > 0$ i $\sin y < 1$ i $0 < \cos y < 1$.

t9. Istnieje liczba dodatnia $\frac{\pi}{2}$ taka, że $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ i jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\sin x > 0$ oraz $\cos x > 0$.

t10. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, na przedziale $(0,\pi)$ funkcja sinus jest dodatnia, funkcja kosinus jest na przedziale $[0,\pi]$ malejąca, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$ funkcja sinus jest rosnąca, na przedziale $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ funkcja sinus maleje, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, na przedziale $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ funkcja sinus rośnie, $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$, na przedziale $[\pi, 2\pi]$ funkcja kosinus rośnie,

t11. Dla każdej liczby zespolonej z zachodzą równości $\cos(z+2\pi) = \cos z$ oraz $\sin(z+2\pi) = \sin z$.

t12. Dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y takiej, że $x^2+y^2 = 1$, istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $t \in [0, 2\pi)$, taka że $x = \cos t$ i jednocześnie $y = \sin t$.

t13. $\sin t < t$ dla $t \in (0,\infty)$.

t14. $t < \operatorname{tg} t$ dla $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dowód. Własność **t5** to natychmiastowa konsekwencja definicji sinusa i kosinusa, własność **t6** można wywnioskować z definicji — obliczenia są bardzo proste lub z własności **t2** i **t3** dokładnie tak, jak to czynią autorzy podręczników szkolnych, a można też posłużyć się wzorem Eulera.

Własność **t7** wywnioskujemy z nierówności wykazanej wcześniej: $|\exp(ix) - 1| \le |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$ (**c7**). Wobec tego $|\sin x - \sin y| \le |\exp(ix) - \exp(iy)| = |\exp(iy)| \cdot$ $\cdot |\exp(ix - iy) - 1| = |\exp(i(x-y)) - 1| \le |x-y|$.

Dowód drugiej nierówności jest analogiczny.

Dla każdego $y \in \mathbb{R}$ mamy $1 - \cos y = |\cos y - 1| = |\cos y - \cos 0| \le |y - 0| = |y|$, zatem $1 - |y| \le \cos y$, więc jeśli $|y| < 1$, to $0 < \cos y$. Mamy też $\cos 1 \ge 0$.

Istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < y < \delta$, to $|1 - \frac{\sin y}{y}| < \frac{1}{2}$ — gdyby nie istniała, to dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ istniałoby takie $y_n \in (0, \frac{1}{n})$, że $|1 - \frac{\sin y_n}{y_n}| \ge \frac{1}{2}$, wbrew temu, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin y_n}{y_n} = 1$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Wobec tego, jeśli $0 < y < \delta$, to $\frac{1}{2} < \frac{\sin y}{y} < \frac{3}{2}$, zatem $\sin y > \frac{y}{2} > 0$. Z tego, że $0 < \sin y$ wynika, że $\cos y < 1$, więc jeśli $0 < y < \delta$, to $0 < \cos y < 1$. Z wzoru **t3** wynika, że

$$\sin y = 2\sin\tfrac{y}{2}\cos\tfrac{y}{2} = 4\sin\tfrac{y}{4}\cos\tfrac{y}{4}\cos\tfrac{y}{2} = 8\sin\tfrac{y}{8}\cos\tfrac{y}{8}\cos\tfrac{y}{4}\cos\tfrac{y}{2} = \ldots =$$
$$= 2^n \sin\tfrac{y}{2^n}\cos\tfrac{y}{2^n}\cos\tfrac{y}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\tfrac{y}{4}\cdot\cos\tfrac{y}{2} \qquad (\spadesuit)$$

Z tego wzoru wynika, że jeśli $0 < y \le 2$, to $\sin y \ge 0$, bo dla dostatecznie dużej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $0 < \frac{y}{2^n} < \delta$, więc $\sin\frac{y}{2^n} > 0$ i oczywiście $\frac{y}{2^j} < 1$, więc $\cos\frac{y}{2^j} \ge 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$.

W rzeczywistości $\cos\frac{y}{2^j} > 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, gdy $y < 2$ lub gdy $n > 1$. Wykażemy, że również $\cos 1 > 0$, czyli że $\sin 1 < 1$.*

Z własności **t7** wynika, że $\sin y = |\sin y - \sin 0| \le |y| = y$. Stąd otrzymujemy $\sin 1 = 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} \le \cos\frac{1}{2} < 1$, co kończy dowód własności **t8**.

Z własności **t7** i z nierówności ($\spadesuit$) wynika, że jeśli $0 < y \le 2$, to $\sin y < y$, a ponieważ dla każdego rzeczywistego y mamy też $\sin y \le 1$, więc $\sin y < y$ dla każdego $y > 0$. Udowodniliśmy własność **t13**.

Przypominamy, że $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ i $\csc z = \frac{1}{\sin z}$ dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$, dla której mianownik jest różny od 0. Dwie ostatnie funkcje, tzn. sekans i kosekans, w Polsce są używane rzadko, ale są kraje, w których ich popularność jest większa.

Jeśli $0 < \alpha \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, to $0 < \sin\alpha < \alpha \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, więc $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, zatem $\cos\alpha > \sin\alpha > 0$, czyli $\operatorname{tg}\alpha < 1$. Wobec tego z nierówności $0 < t < \sqrt{2}$ wynika nierówność $0 < \frac{t}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, a z niej nierówność $\operatorname{tg} t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} > 2\operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Stąd (indukcja) oraz z równości $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(t\cdot 2^{-n}) = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(t\cdot 2^{-n})}{t\cdot 2^{-n}} = 1$ wynika

$$\operatorname{tg} t > 2\operatorname{tg}\tfrac{t}{2} > 2^2\operatorname{tg}\tfrac{t}{2^2} > \ldots > 2^n\operatorname{tg}\tfrac{t}{2^n} = t\cdot\tfrac{\sin(t\cdot 2^{-n})}{t\cdot 2^{-n}}\cdot\cos(t\cdot 2^{-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} t\cdot 1\cdot 1 = t,$$

więc własność **t14** jest prawie udowodniona, prawie bo tylko dla $t \in (0, \sqrt{2})$.

W szczególności $\operatorname{tg} 1 > 1$, więc $\sin 1 > \cos 1$, zatem $\cos 2 = \cos^2 1 - \sin^2 1 < 0$. Teraz możemy zdefiniować $\frac{\pi}{2} = \inf\{t > 0\colon\ \cos t \le 0\}$. Z tego, co do tej pory wykazaliśmy, wynika, że $1 \le \frac{\pi}{2} \le 2$ — zbiór, którego kres rozpatrujemy zawiera liczbę 2 i z tego wynika prawa nierówność, lewa nierówność wynika z własności **t8**. Udowodnimy, że $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Załóżmy, że $\cos\frac{\pi}{2} \ne 0$. Z nierówności $|t - \frac{\pi}{2}| < |\cos\frac{\pi}{2}|$ wynika, że $|\cos t - \cos\frac{\pi}{2}| \le |t - \frac{\pi}{2}| < |\cos\frac{\pi}{2}|$. Stąd wynika, że liczby $\cos t$ i $\cos\frac{\pi}{2}$ mają ten sam znak. Jeśli $\cos\frac{\pi}{2} < 0$, to $\inf\{t > 0\colon\ \cos t \le 0\} \le \frac{\pi}{2} - |\cos\frac{\pi}{2}|$, wbrew definicji liczby $\frac{\pi}{2}$. Jeśli $\cos\frac{\pi}{2} > 0$, to $\inf\{t > 0\colon\ \cos t \le 0\} \ge \frac{\pi}{2} + |\cos\frac{\pi}{2}|$, co przeczy definicji liczby $\frac{\pi}{2}$. Wobec tego $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. $\frac{\pi}{2} \ne 2$, bo $\cos\frac{\pi}{2} = 0 > \cos 2$. $\frac{\pi}{2} \ne 1$, bo $\cos\frac{\pi}{2} = 0 < \cos 1$. Wobec tego $2 > \frac{\pi}{2} > 1$. Jasne jest, że jeśli $0 < t < \frac{\pi}{2}$, to $\cos t > 0$ i $\sin t > 0$. Własność **t9.** zostałą wykazana.

---

* Wiemy już, że $\cos 1 \ge 0$ oraz $\cos^2 1 + \sin^2 1 = 1$, teraz chodzi o ostrą nierówność.

Zajmiemy się własnością **t10.** Ponieważ $1 = \cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2}$ oraz $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, więc $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Jeśli $0 < x < \pi$, to $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$, zatem — na mocy poprzednio wykazanych własności sinusa i kosinusa — mamy $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} > 0$.

Wynika stąd, że jeśli $0 \le t < s \le \pi$, to $\cos t - \cos s = 2\sin\frac{s-t}{2}\sin\frac{s+t}{2} > 0$. Oznacza to, że funkcja kosinus maleje (ściśle) na przedziale $[0,\pi]$. Mamy również $\cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = -1$ i $\sin\pi = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Wobec tego z nierówności $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ wynika, że $0 = \cos\frac{\pi}{2} > \cos x > \cos\pi = -1$, więc kosinus przyjmuje ujemne wartości na przedziale $(\frac{\pi}{2},\pi]$. Jeśli więc $0 \le x < y \le \frac{\pi}{2}$, to $\sin y - \sin x = 2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2} > 0$, a zatem funkcja sinus jest rosnąca na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Podobnie, jeśli $\frac{\pi}{2} \le x < y \le \pi$, to $0 < \frac{y-x}{2} < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2} < \frac{x+y}{2} < \pi$, zatem $\sin y - \sin x = 2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2} < 0$, zatem na przedziale $[\frac{\pi}{2},\pi]$ funkcja sinus maleje. Zachowanie się obu funkcji kosinus i sinus na przedziale $[\pi,2\pi]$ badamy stosując wzory $\cos(x+\pi) = \cos x\cos\pi - \sin x\sin\pi = -\cos x$ oraz $\sin(x+\pi) = \sin x\cos\pi + \cos x\sin\pi = -\sin x$. To kończy sprawdzenie prawdziwości własności dziesiątej.

Mamy $\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1$ i $\cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Dodając te równości stronami otrzymujemy $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$, a ponieważ $\cos\frac{\pi}{4} > 0$, więc $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Stąd $\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pozwala to stwierdzić, że rozumowanie, które doprowadziło nas do stwierdzenia, że $\operatorname{tg} t > t$, gdy $0 < t < \sqrt{2}$ można powtórzyć przy zakładając, że $0 < t < \frac{\pi}{2}$, bo istotne tam było jedynie to, że $\operatorname{tg}\frac{t}{2} < 1$, a tak jest dla wszystkich $t \in (0,\frac{\pi}{2})$.

Własność jedenasta wynika natychmiast z wzorów $\cos(x+\pi) = -\cos x$ oraz $\sin(x+\pi) = -\sin x$, które już uzyskaliśmy.

Udowodnimy teraz własność dwunastą. Niech $x^2+y^2 = 1$, $x,y \in \mathbb{R}$. Oczywiście zachodzi nierówność $-1 \le x \le 1$. Niech $t = \inf\{\alpha \in [0,\pi]: \quad \cos\alpha \ge x\}$. Wykażemy, że $x = \cos t$. Załóżmy, że tak nie jest. Jeżeli $|t-\alpha| < |x-\cos t|$, to z własności **t7.** wynika, że $|\cos t - \cos\alpha| \le |t-\alpha| < |x-\cos t|$. Wynika stąd, że liczby $\cos\alpha$ i $\cos t$ leżą po tej samej stronie punktu x. To jednak przeczy definicji liczby t. Wobec tego $x = \cos t$. Istnieje tylko jedna liczba t spełniająca ten warunek, bo jeśli $0 \le t_1 < t_2 \le \pi$, to $\cos t_1 > \cos t_2$ — własność **t10.**

Jeśli $y \ge 0$, to $y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = \sin t$, bo na przedziale $[0,\pi]$ funkcja sinus przyjmuje jedynie nieujemne wartości. Jeśli $y < 0$, to definiujemy $\tau = 2\pi - t \in (\pi,2\pi]$. Bez trudu przekonujemy się, że $x = \cos\tau$ i $y = \sin\tau$.

Ponieważ $\cos(t+2\pi) = \cos t$ i jednocześnie $\sin(t+2\pi) = \sin t$, więc zmiana argumentu t o 2π daje następny argument τ, dla którego spełnione są równości $x = \cos\tau$ i $y = \sin\tau$. Możemy więc znaleźć liczbę t w przedziale $[0,2\pi)$. Jeśli $y > 0$, to $0 < t < \pi$, jeśli $y < 0$, to $\pi < t < 2\pi$. Jedyność t w tym przedziale wynika z tego, że na przedziale $[0,\pi]$ funkcja kosinus jest ściśle malejąca, a na przedziale $[\pi, 2\pi)$ — ściśle rosnąca. W ten sposób udowodniliśmy własność dwunastą. ■

Mamy teraz $\exp(\pi i) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, zatem

$$e^{\pi i} + 1 = 0\,.$$

Otrzymaliśmy zatem wzór, w którym występują pięć najważniejszych liczb w matematyce.

Wykażemy jeszcze jedno twierdzenie. Chodzi o to, by przekonać się, że jeśli $t > 0$, to liczba ta może być uważana za długość łuku okręgu jednostkowego, który to łuk zaczyna się w punkcie $1 = e^{i\cdot 0}$ i kończy się w punkcie e^{it}. Tę długość łuku wypada najpierw zdefiniować. Rozsądnie jest przyjąć, że jest ona równa kresowi górnemu długości łamanych wpisanych w ten łuk.

Twierdzenie 4.17 (o długości łuku okręgu)
Niech $t > 0$. Wtedy
$$t = \sup\{\left|e^{it_n} - e^{it_{n-1}}\right| + \left|e^{it_{n-1}} - e^{it_{n-2}}\right| + \dots + \left|e^{it_2} - e^{it_1}\right| + \left|e^{it_1} - e^{it_0}\right|\colon \quad 0 = t_0 < \\ < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-2} < t_{n-1} < t_n = t,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Dowód. Dla dowolnego $j \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ mamy
$$\left|e^{it_{j+1}} - e^{it_j}\right| = \left|e^{it_j}\right|\left|e^{i(t_{j+1}-t_j)} - 1\right| = \left|e^{i(t_{j+1}-t_j)} - 1\right| \le (t_{j+1} - t_j)\,.$$
Stąd od razu wynika, że
$$\left|e^{it_n} - e^{it_{n-1}}\right| + \left|e^{it_{n-1}} - e^{it_{n-2}}\right| + \dots + \left|e^{it_2} - e^{it_1}\right| + \left|e^{it_1} - e^{it_0}\right| \le \\ \le (t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1} - t_{n-2}) + \dots + (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0) = t_n - t_0 = t - 0 = t\,.$$
Wykazaliśmy, że długość łamanej wpisanej w łuk nie przekracza liczby t.

Zauważmy teraz, że jeśli dodamy do liczb $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-2} < t_{n-1} < t_n$ punkt $\tau \in (t_j, t_{j+1})$, to długość łamanej nie zmniejszy się, bo
$$\left|e^{it_{j+1}} - e^{it_j}\right| \le \left|e^{it_{j+1}} - e^{i\tau}\right| + \left|e^{i\tau} - e^{it_j}\right|\,.$$
Chcąc wykazać, że istnieją łamane wpisane w łuk, których długość jest tylko trochę mniejsza od t wystarczy zajmować się jedynie łamanymi odpowiadającymi jedynie „drobnym” podziałom odcinka $[0,t]$, tj. takim, że największa z liczb $t_{j+1} - t_j$ jest „mała”.

Niech $\varepsilon \in (0,1)$. Wtedy $(1-\varepsilon)t < t$. Wykażemy, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < \tau < \delta$, to $\left|e^{i\tau} - 1\right| \ge (1-\varepsilon)\tau$. Gdyby nie było to prawdą, to dla każdej liczby naturalnej $m > 0$ istniałaby taka liczba $\tau_m \in (0, \frac{1}{m})$, że $\left|e^{i\tau_m} - 1\right| < (1-\varepsilon)\tau_m$. Zachodziłaby więc nierówność

$$\left|\frac{e^{i\tau_m} - 1}{i\tau_m}\right| < 1 - \varepsilon\,,$$

co jednak nie jest możliwe ze względu na to, że $\lim\limits_{n\to\infty} i\tau_m = 0$ i wobec tego byłoby

$$1 = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{e^{i\tau_m} - 1}{i\tau_m}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{e^{i\tau_m} - 1}{i\tau_m}\right| \le 1 - \varepsilon\,.$$

Załóżmy teraz, że $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-2} < t_{n-1} < t_n = t$ i że dla każdej liczby $j \in \{0, 1, 2, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}\}$ zachodzi nierówność $t_{j+1} - t_j < \delta$. Wtedy $\left|e^{it_n} - e^{it_{n-1}}\right| + \left|e^{it_{n-1}} - e^{it_{n-2}}\right| + \cdots + \left|e^{it_2} - e^{it_1}\right| + \left|e^{it_1} - e^{it_0}\right| \ge (1-\varepsilon)(t_n - t_{n-1}) +$
$+ (1-\varepsilon)(t_{n-1} - t_{n-2}) + \cdots + (1-\varepsilon)(t_2 - t_1) + (1-\varepsilon)(t_1 - t_0) = (1-\varepsilon)t\,.$
Wobec dowolności $\varepsilon \in (0,1)$ z udowodnionego stwierdzenia teza wynika natychmiast. ■

Uwaga 4.18 Udowodniliśmy nieco więcej niż obiecaliśmy pisząc tezę ostatniego twierdzenia. Wykazaliśmy nie tylko to, że liczba t jest kresem górnym łamanych wpisanych w łuk, ale też, że każda łamana wpisana w ten łuk odpowiadająca dostatecznie drobnemu podziałowi odcinka $[0, t]$ przybliża długość łuku. Gdybyśmy nie chcieli uzyskać aż tyle, moglibyśmy w ostatniej części dowodu rozważać łamaną odpowiadającą podziałowi odcinka $[0, t]$ na n równych części i skorzystać z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left|e^{it/n} - 1\right| = t$, co już wcześniej wykorzystywaliśmy. ■

Lemat 4.19 (o lipschitzowskości funkcji wykładniczej)
Jeśli $t_1 < t_2 \le w$, to $0 < \exp(t_2) - \exp(t_1) \le \exp(t_2)(t_2 - t_1) \le \exp(w)(t_2 - t_1)$.

Dowód. $\exp(t_2) = \exp(t_1)\exp(t_2 - t_1) \ge \exp(t_1)(1 + t_2 - t_1) > \exp(t_1)$ — lewa nierówność jest udowodniona. Dalej $\exp(t_2) - \exp(t_1) = \exp(t_2)\big(1 - \exp(t_1 - t_2)\big) \le \exp(t_2)\big(1 - (1 + t_1 - t_2)\big) = \exp(t_2)(t_2 - t_1) \le \exp(w)(t_2 - t_1)$. Wykazaliśmy prawdziwość prawej nierówności. ■

Definicja 4.20 (warunku Lipschitza)
Funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \ge 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $t_1, t_2 \in A \subseteq \mathbb{C}$ zachodzi nierówność $|f(t_1) - f(t_1)| \le L|t_1 - t_2|$. ■

Uwaga 4.21 Wykazaliśmy więc, że funkcja exp spełnia warunek Lipschitza na półprostej $(-\infty, w]$ ze stałą $\exp(w)$. ■

Twierdzenie 4.22 (o zbiorze wartości funkcji exp)

1. Dla każdej liczby rzeczywistej $w > 0$ istnieje dokładnie jedna taka liczba rzeczywista x, że $w = \exp(x)$.
2. Dla każdej liczby zespolonej w różnej od 0 istnieje taka liczba zespolona z, że $w = \exp(z)$.
3. Jeśli $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, to istnieje taka liczba całkowita n, że $z_2 - z_1 = 2n\pi i$.

Dowód. Mamy $\exp(w) \geq 1 + w > w$ oraz $\exp(\frac{1}{w}) \geq 1 + \frac{1}{w} > \frac{1}{w}$. Stąd wynika, że $\exp(-\frac{1}{w}) < w < \exp(w)$. Zbiór $\{t \in \mathbb{R}\colon \quad \exp(t) \leq w\}$ jest niepusty, bo zawiera liczbę $-\frac{1}{w}$. Jest ograniczony z góry liczbą w, bo jeśli $t \geq w$, to $e^t \geq e^w > w$. Ma więc skończony kres górny. Niech $x = \sup\{t \in \mathbb{R}\colon \quad \exp(t) \leq w\}$. Oczywiście $x \leq w$. Udowodnimy, że $w = \exp(x)$. Załóżmy, że $w \neq \exp(x)$. Wtedy jeśli $t < w$ oraz $|t - x| < \exp(-w)|w - \exp(x)|$, to $|\exp(t) - \exp(x)| \leq \exp(w)|t - x| < |w - \exp(x)|$. Z tej nierówności wynika, że liczby $\exp(t)$ i $\exp(x)$ leżą po tej samej stronie liczby w. Jeśli więc $\exp(x) < w$ i $x < t < x + \exp(w)(t - x)$, to $\exp(t) < w$, wbrew temu, że x jest ograniczeniem górnym zbioru $\{t \in \mathbb{R}\colon \quad \exp(t) \leq w\}$. Jeśli zaś $\exp(x) > w$ i $x > t > x - \exp(w)(t - x)$, to $\exp(t) > w$ wbrew temu, że x jest **najmniejszym** ograniczeniem górnym zbioru $\{t \in \mathbb{R}\colon \quad \exp(t) \leq w\}$. Część pierwsza twierdzenia jest udowodniona.

Jeśli $w \neq 0$, to istnieje taka liczba $y \in \mathbb{R}$, że $\frac{w}{|w|} = \exp(iy)$ — wynika to z własności **t12** funkcji kosinus i sinus. Z poprzedniej części dowodzonego twierdzenia wynika istnienie takiej liczby $x \in \mathbb{R}$, że $|w| = \exp(x)$. Wobec tego $w = |w| \cdot \frac{w}{|w|} = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x + iy)$, więc wystarczy przyjąć $z = x + yi$. Zauważmy, że $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$, zatem jeśli $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, to $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$. Jeśli $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ oraz $\exp(iy_1) = \exp(iy_2)$, to istnieje taka liczba $n \in \mathbb{Z}$, że $y_2 - y_1 = 2n\pi$ — wynika to z własności **t12**. Dowód został zakończony. ∎

Kilka zadań

4.01 Udowodnić, że $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + + \frac{1}{n!})$.

4.02 Udowodnić, że $e \notin \mathbb{Q}$.

4.03 Udowodnić, że $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ i $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

4.04 Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ istnieje taki wielomian w stopnia $2n + 1$, że równość $\sin(2n + 1)\alpha = w(\sin\alpha)$ zachodzi dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$. Znaleźć współczynnik kierujący tego wielomianu (ten przy $2n + 1$–ej potędze zmiennej).

4.05 Wykazać, że dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ i każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie n parami różnych liczb $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takich, że $z_j^n = z$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$.

4.06 Załóżmy, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Wykazać, że $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

4.07 Znaleźć pierwiastki (wszystkie cztery) wielomianu $z^4 + z^3 - z^2 + z + 1$ i wykazać, że żaden z nich nie jest pierwiastkiem z jedności (żadnego stopnia).

4.08 Udowodnić, że dla każdej liczby zespolonej w istnieje taka liczba zespolona z, że $w = \sin z$.

4. 09 Znaleźć wzór na sumę $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots$ — sumujemy dopóki ma to sens.

4. 10 Udowodnić, że jeśli $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ oraz $ad\neq bc$ i $h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ dla $z\neq-\frac{d}{c}$, przekształcenie H oznacza przeniesienie h na sferę za pomocą rzutu stereograficznego, to H przekształca okręgi na okręgi. Oznacza to, że jeśli φ jest rzutem stereograficznym „z bieguna północnego" na płaszczyznę, to $H(\mathbf{p})=\varphi^{-1}\circ h\circ\varphi(\mathbf{p})$ dla każdego $\mathbf{p}$ z wyjątkiem bieguna północnego (wtedy $\varphi(\mathbf{p})$ nie jest w ogóle określone) oraz z wyjątkiem punktu $\varphi^{-1}(-\frac{d}{c})$, definiujemy $H\big(\varphi^{-1}(-\frac{d}{c})\big)=P_N$, gdzie P_N oznacza biegun północny, zaś $H(P_N)=P_N$, gdy $c=0$ (i nie można mówić o liczbie $-\frac{d}{c}$) oraz $H(P_N)=\varphi^{-1}(\frac{a}{c})$, gdy $c\neq 0$.