Funkcje analityczne — przykłady

ostatnia aktualizacja: 20 lutego 2020, 23:57

Twierdzenie 14.1 (rozwinięcie sinusa w iloczyn nieskończony)

Dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość

$$\sin z = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \tfrac{z^2}{n^2\pi^2}\right) := z \cdot \lim_{n\to\infty}\Big(\left(1-\tfrac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\Big)$$

przy czym iloczyn jest zbieżny niemal jednostajnie, czyli jednostajne na każdym zbiorze zwartym $K \subseteq \mathbb{C}$.

Dowód. Najpierw wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian W_n stopnia $2n+1$, że dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość:

$$\sin(2n+1)z = W_n(\sin z).$$

Można udowodnić istnienie wielomianu W_n przez indukcję, ale zamiast tego skorzystamy z wzorów Eulera. Mamy

$$\sin(2n+1)z = \tfrac{1}{2i}\Big(\big(\cos(2n+1)z + i\sin(2n+1)z\big) - \big(\cos(2n+1)z - i\sin(2n+1)z\big)\Big) =$$
$$= \tfrac{1}{2i}\Big(\big(\cos z + i\sin z\big)^{2n+1} - \big(\cos z - i\sin z\big)^{2n+1}\Big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\tbinom{2n+1}{2k+1}\cos^{2n+1-2k-1} z\sin^{2k+1} z =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\tbinom{2n+1}{2k+1}(1-\sin^2 z)^{n-k}\sin^{2k+1} z := W_n\big(\sin(z)\big).$$

Oczywiście stopień wielomianu W_n nie jest większy niż $2n+1$. Dla każdej liczby całkowitej k zachodzi równość $W\big(\sin\frac{k\pi}{2n+1}\big) = \sin(k\pi) = 0$. Oznacza to, że liczba $\sin\frac{k\pi}{2n+1}$ jest pierwiastkiem wielomianu W_n. Funkcja sinus rośnie (ściśle) na przedziale $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$. Wobec tego

$$\sin\tfrac{-n\pi}{2n+1} < \sin\tfrac{(-n+1)\pi}{2n+1} < \ldots < \sin\tfrac{0\cdot\pi}{2n+1} < \sin\tfrac{\pi}{2n+1} < \ldots < \sin\tfrac{n\pi}{2n+1}.$$

Wskazaliśmy więc $2n+1$ **parami różnych** pierwiastków wielomianu W_n, więc jego stopień nie jest mniejszy niż $2n+1$. Pierwiastki wielomianu W_n leżą symetrycznie względem punktu 0 na osi rzeczywistej. Można go przedstawić jako iloczyn:

$$W_n(u) = A_n\, u\left(1-\tfrac{u^2}{\sin^2\frac{\pi}{2n+2}}\right)\left(1-\tfrac{u^2}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+2}}\right)\left(1-\tfrac{u^2}{\sin^2\frac{3\pi}{2n+2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{u^2}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+2}}\right),$$

A_n oznacza tu pewną stałą, którą niebawem znajdziemy. Niech $u = \sin\frac{z}{2n+1}$. Wtedy:

$$\sin z = \sin\left((2n+1)\cdot\tfrac{z}{2n+1}\right) = W_n\big(\sin\tfrac{z}{2n+1}\big) =$$
$$= A_n\cdot\sin\tfrac{z}{2n+1}\cdot\left(1-\tfrac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\left(1-\tfrac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\tfrac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Z tej równości wynika, że

$$2n+1 = \lim_{z\to 0}\tfrac{\sin z}{\sin\frac{z}{2n+1}} =$$
$$= \lim_{z\to 0} A_n\cdot\left(1-\tfrac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\left(1-\tfrac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\tfrac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right) = A_n.$$

Znaleźliśmy więc A_n i możemy napisać wzór:

$\sin z = z\cdot\frac{\sin\frac{z}{2n+1}}{\frac{z}{2n+1}}\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\Big).$

W dalszym ciągu skorzystamy z nierówności

$$(1)\qquad \big|(1+z_1)(1+z_2)\cdot\ldots\cdot(1+z_m)-1\big|\leqslant \leqslant(1+|z_1|)(1+|z_2|)\cdot\ldots\cdot(1+|z_m|)-1\leqslant e^{|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_m|}-1,$$

którą każdy student z łatwością sam udowodni (np. przez indukcję względem m).

Niech $r>0$. Załóżmy, że $|z|\leqslant r$. Istnieje taka liczba $\delta>0$, że jeśli $0<|\alpha|<\delta$, to $\big|1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\big|<\frac13$, zatem $\frac23<\big|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\big|<\frac43$. Istnieje taka liczba naturalna $\nu>r$, że jeśli $n>\nu$, to $\frac{|z|}{2n+1}\leqslant\frac{r}{2n+1}<\delta$. Jeśli $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, to $\sin\beta>\frac{2}{\pi}\beta$, bo funkcja sinus jest ściśle wklęsła na przedziale $[0,\pi]$. Niech $n>\nu$ oraz $0<j\leqslant n$. Wtedy

$$(2)\qquad \left|\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{j\pi}{2n+1}}\right|\leqslant\frac{\frac{16|z|^2}{9(2n+1)^2}}{(\frac{2}{\pi}\frac{j\pi}{2n+1})^2}=\frac{16|z|^2}{36j^2}\leqslant\frac{|z|^2}{2j^2}\leqslant\exp\Big(\frac{|z|^2}{2j^2}\Big)-1\leqslant\exp\Big(\frac{r^2}{2j^2}\Big)-1.$$

Z nierówności (1) i (2) wynika, że jeśli $0<k\leqslant n$, to

$$\left|\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\Big)-1\right|\leqslant$$
$$\leqslant\exp\Big(\frac{r^2}{2\cdot1^2}+\frac{r^2}{2\cdot2^2}+\frac{r^2}{2\cdot3^2}+\ldots+\frac{r^2}{2\cdot k^2}\Big)-1\leqslant\exp(r^2)-1,$$

oraz

$$(3)\qquad \left|\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+1)\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+2)\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+3)\pi}{2n+1}}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\Big)-1\right|\leqslant$$
$$\leqslant\exp\Big(\frac{r^2}{2(k+1)^2}+\frac{r^2}{2(k+2)^2}+\frac{r^2}{2(k+3)^2}+\ldots+\frac{r^2}{2n^2}\Big)-1\leqslant\exp\Big(\frac{r^2}{2k}\Big)-1\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

bowiem jeśli $k\geqslant1$, to

$$\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\frac{1}{(k+3)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$
$$=\frac1k-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac1n=\frac1k-\frac1n<\frac1k.$$

Niech $M=re^{r^2}$ i niech k będzie taką liczbą, że $M\cdot\big(\exp\big(\frac{r^2}{2k}\big)-1\big)<\frac{\varepsilon}{3}$. Jasne jest, że iloczyn $k+2$ ograniczonych czynników (nie zmieniamy k)

$$z\cdot\frac{\sin\frac{z}{2n+1}}{\frac{z}{2n+1}}\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\Big)$$

przy $n\longrightarrow\infty$ dąży jednostajnie na kole $\{z\colon\quad |z|\leqslant r\}$ do funkcji

$$z\Big(1-\frac{z^2}{\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\Big).$$

Mamy oczywiście

$$\left|z\Big(1-\frac{z^2}{\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\Big)\right|\leqslant$$
$$\leqslant r\exp\Big(\frac{r^2}{\pi^2}+\frac{r^2}{2^2\pi^2}+\frac{r^2}{3^2\pi^2}+\ldots+\frac{r^2}{k^2\pi^2}\Big)\leqslant r\exp\Big(\frac{2r^2}{\pi^2}\Big)<re^{r^2}=M.$$

To oszacowanie wspólne dla tych z, dla których $|z|\leqslant r$. Niech $\varepsilon>0$. Oznaczmy:

$P_n(z)=z\cdot\frac{\sin\frac{z}{2n+1}}{\frac{z}{2n+1}}\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n+1}}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\Big),$

$Q_n(z)=z\Big(1-\frac{z^2}{\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\Big),$

$R_n(z)=\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+1)\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+2)\pi}{2n+1}}\Big)\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+3)\pi}{2n+1}}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\Big),$

$r_n(z)=\Big(1-\frac{z^2}{(k+1)^2\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{z^2}{(k+2)^2\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{z^2}{(k+3)^2\pi^2}\Big)\cdot\ldots.$

Bez trudu stwierdzić można, że $|r_n(z)-1|<\exp\big(\frac{r^2}{k\pi^2}\big)-1<\exp\big(\frac{r^2}{2k}\big)-1$, wcześniej udowodniliśmy **(3)**, więc że $|R_n(z)-1|\leqslant\exp\big(\frac{r^2}{2k}\big)-1$ oraz że $|P_n(z)|\leqslant r\exp(r^2)$.

Istnieje taka liczba $n_0 > k$, że jeśli $n > n_0$, to $|P_n(z) - Q_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla wszystkich liczb z, dla których $|z| \leqslant r$. W takiej sytuacji mamy:
$|\sin z - z(1 - \frac{z^2}{\pi^2})(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}) \cdot \ldots| = |P_n(z)R_n(z) - Q_n(z)r_n(z)| \leqslant$
$\leqslant |P_n(z)R_n(z) - P_n(z)| + |P_n(z) - Q_n(z)| + |Q_n(z) - Q_n(z)r_n(z)| \leqslant$
$\leqslant M \cdot |R_n(z) - 1| + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot |1 - r_n(z)| < M\big(\exp\big(\frac{r^2}{2k}\big) - 1\big) + \frac{\varepsilon}{3} + M\big(\exp\big(\frac{r^2}{2k}\big) - 1\big) < \varepsilon.$

Z otrzymanej nierówności wynika dowodzona teza. ■

Lemat 14.2

Funkcja $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$ jest analityczna w pewnym otoczeniu punktu 0.

Dowód. Zachodzi równość: $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$. Mamy
$x\cos x - \sin x = x\big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots\big) - \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots\big) =$
$= -\frac{2}{3!}x^3 + \frac{4}{5!}x^5 - \frac{6}{7!}x^7 + \ldots = x^3\big(-\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!}x^2 - \frac{6}{7!}x^4 + \ldots\big)$
oraz $x\sin x = x\big(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots\big) = x^2\big(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots\big)$, więc po skróceniu przez x^2 otrzymujemy iloraz

$$\frac{-\frac{2}{3!}x + \frac{4}{5!}x^3 - \frac{6}{7!}x^5 + \ldots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots}.$$

Wobec tego istnieją takie liczby b_1, b_3, …, że

$$\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = \frac{-\frac{2}{3!}x + \frac{4}{5!}x^3 - \frac{6}{7!}x^5 + \ldots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots} = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + \ldots$$

dla wszystkich x dostatecznie bliskich liczbie 0. Z równości
$-\frac{2}{3!}x + \frac{4}{5!}x^3 - \frac{6}{7!}x^5 + \ldots = \big(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots\big)\big(b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + \ldots\big)$
wynika, że $b_1 = -\frac{2}{3!} = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{4}{5!} + \frac{1}{3!}b_1 = -\frac{1}{45}$. Można wypisać bez trudu kilka następnych wzorów na kolejne współczynniki $b_5, b_7, \ldots$.

Zauważmy, że
$\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = \big(\ln|\sin x| - \ln|x|\big)' = \big(\ln\frac{|\sin x|}{|x|}\big)' = \big(\ln\frac{|\sin x|}{|x|}\big)' =$
$= \Big(\ln\big((1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}) \cdot \ldots\big)\Big)' = \Big(\ln(1 - \frac{x^2}{\pi^2}) + \ln(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}) + \ldots\Big)' =$
$= -2x\big(\frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{2^2\pi^2 - x^2} + \ldots\big).$
Ostatni szereg — dowód niżej — jest jednostajnie zbieżny na każdym zbiorze zwartym K, który nie zawiera ani jednego spośród punktów $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, … Istnieje taka liczba $M > 0$, że jeśli $x \in K$, to $|x| \leqslant M$. Jeśli $|n| > M$ i $x \in K$, to $\big|\frac{1}{n^2\pi^2 - x^2}\big| \leqslant \frac{1}{n^2\pi^2 - M^2} < \frac{1}{n^2(\pi^2 - 1)}$. Teraz powołamy się na kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego. Wiedząc, że szereg pochodnych jest jednostajnie zbieżny i że szereg funkcji jest zbieżny w co najmniej jednym punkcie, stwierdzamy, że szereg funkcyjny jest zbieżny, a to właśnie chcieliśmy wykazać.

Niech $0 < r < 1$ i $|x| \leqslant r\pi$. Mamy wtedy $\big|\frac{1}{n^2\pi^2 - x^2}\big| \leqslant \frac{1}{n^2\pi^2 - |x|^2} \leqslant \frac{1}{n^2\pi^2 - r^2\pi^2}$ oraz $\frac{1}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{n^2\pi^2(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})} = \frac{1}{n^2\pi^2}\big(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2} + \frac{x^4}{n^4\pi^4} + \frac{x^6}{n^6\pi^6} + \ldots\big)$ i wobec tego, że $\frac{1}{n^2\pi^2}\big(1 +$

$\left|\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right| + \left|\frac{x^4}{n^4\pi^4}\right| + \left|\frac{x^6}{n^6\pi^6}\right| + \ldots\Big) = \frac{1}{n^2\pi^2}\frac{1}{1-\frac{|x^2|}{n^2\pi^2}} = \frac{1}{n^2\pi^2-|x|^2} \leqslant \frac{1}{n^2\pi^2-r^2\pi^2}$. Wynika stąd, że w szeregu podwójnym $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2(k+1)}\pi^{2(k+1)}}$ można zmieniać kolejność sumowania w dowolny sposób zachowując jego sumę. Mamy wobec tego

$$b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + \ldots = \operatorname{ctg} x - \tfrac{1}{x} = -2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2-x^2} = -2x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2(k+1)}\pi^{2(k+1)}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}x^{2k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n^{2(k+1)}\pi^{2(k+1)}}.$$

Przypomnijmy, że $b_1 = -\frac{1}{3}$, $b_2 = -\frac{1}{45}$. Porównując współczynniki przy x oraz x^3 po obu stronach równości otrzymujemy

$$-\tfrac{1}{3} = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n^2\pi^2}, \qquad \text{oraz} \qquad -\tfrac{1}{45} = b_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n^4\pi^4}.$$

Z tych równości wynika, że $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ i $\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots$. Podobnie uzyskujemy wzory na $1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \ldots$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Lemat 14.3 Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie 0, czyli $\tilde{f}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_nx^n$ dla pewnych liczb $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots$ i wszystkich x spełniających nierówność $|x| < r$, gdzie $r > 0$, $\tilde{a}_0 \neq 0$, to również funkcja $\frac{1}{\tilde{f}(x)}$ jest analityczna w punkcie 0.

Dowód. Niech $a_n = \frac{\tilde{a}_n}{\tilde{a}_0}$ i niech $f(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{a}_0} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. Ponieważ $\frac{1}{\tilde{f}(x)} = \frac{1}{\tilde{a}_0f(x)}$, więc wystarczy wykazać analityczność funkcji $\frac{1}{f(x)}$ w punkcie 0. Znajdziemy takie liczby $b_1, b_2, \ldots$ i liczbę $\varrho > 0$, że $\frac{1}{f(x)} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ dla każdego $x \in (-\varrho, \varrho)$. Z równości $1 = \Big(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n\Big)\Big(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n\Big)$ i twierdzenia o mnożeniu szeregów, wynika, że muszą być spełnione równości:

$a_1 + b_1 = 0$, $a_2 + a_1b_1 + b_2 = 0$, $a_3 + a_2b_1 + a_1b_2 + b_3 = 0$, $\ldots$

Stąd wzory: $b_1 = -a_1$, $b_2 = -a_2 - a_1b_1$, $b_3 = -a_3 - a_2b_1 - a_1b_2$, $\ldots$ Możemy więc obliczyć współczynniki $b_1, b_2, b_3, \ldots$ Pozostaje kwestia zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$.

Niech $c \in (0, r)$. Szereg $\sum a_nc^n$ jest zbieżny, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_nc^n = 0$. Istnieje więc taka liczba $M > 1$, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ spełniona jest nierówność $|a_nc^n| < M$ (ciąg o granicy skończonej jest ograniczony). Za pomocą łatwej indukcji dowodzimy, że spełnione są nierówności $|b_n| \leq 2^{n-1}M^nc^{-n}$. Wynika stąd, że szereg $\sum b_nx^n$ jest zbieżny dla każdego $x \in (-\frac{c}{2M}, \frac{c}{2M})$ (być może nie tylko dla tych x), więc ma dodatni promień zbieżności.