Funkcje analityczne

ostatnia aktualizacja: 30 marca 2010, 16:27

Zaczniemy od uogólnienia twierdzenia o zmianach kolejności sumowania szeregu bezwzględnie zbieżnego. Dowód tego twierdzenia nie pojawił się na wykładzie. Jego sformułowanie pojawiło się jedynie „w powietrzu”.

Twierdzenie 13.1 (o dużej zmianie kolejności sumowania)
Załóżmy, że zachodzi jedno z dwóch założeń:

(i) dla każdej liczby całkowitej $m \geq 0$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$ jest zbieżny i

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) < +\infty\,,$$

(ii) $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}| < \infty$ dla pewnej bijekcji $\tilde{\sigma} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Wtedy dla każdej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}a_{\sigma(j)}\,.$$

Dowód. Wykażemy najpierw, że warunki (i) oraz (ii) są równoważne.

Załóżmy, że spełniony jest warunek (i). Dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ szereg $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\sigma(j)}|$ jest zbieżny, bo

$$\sum_{j=0}^{l}|a_{\sigma(j)}| \leq \sum_{m=0}^{p}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) \leq \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big)$$

dla każdej tak dużej liczby naturalnej p, że każda z liczb $|a_{\sigma(0)}|$, $|a_{\sigma(1)}|$, $\ldots$, $|a_{\sigma(l)}|$ jest składnikiem któregoś z szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$, gdzie $m \in \{0, 1, \ldots, p\}$ (np. p jest największym z pierwszych elementów par $\sigma(0)$, $\sigma(1)$, $\ldots$, $\sigma(l)$).

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek (ii). Dla dowolnych liczb naturalnych p, q spełniona jest nierówność

$$\sum_{m=0}^{q}\Big(\sum_{n=0}^{p}|a_{m,n}|\Big) \leq \sum_{j=0}^{\ell}|a_{\tilde{\sigma}(j)}| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,,$$

gdzie ℓ oznacza tak dużą liczbę naturalną, że wśród par $\tilde{\sigma}(0), \tilde{\sigma}(1), \ldots, \tilde{\sigma}(\ell)$ znajdują się wszystkie pary $(0,0), (0,1), \ldots, (0,p), (1,0), \ldots, (1,p), (q,0), \ldots, (q,p)$. Ustalając q i przechodząc do granicy przy $p \longrightarrow \infty$ otrzymujemy nierówność

$$\sum_{m=0}^{q}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) \leq \sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,.$$

Z definicji sumy szeregu wynika, że

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,.$$

Wykazaliśmy, że z założenia (ii) wynika założenie (i).

W istocie rzeczy z dowodu równoważności warunków (i) i (ii) wynika równość:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}| = \sum_{j=0}^{\infty}|a_{\tilde\sigma(j)}|\,,$$

przy czym jest ona prawdziwa zawsze, również wtedy, gdy sumy nie są skończone.

Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje taka liczba $k(m)\in\mathbb{N}$, że $\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}|a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2^{m+3}}$. Wtedy

$$\Big|\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}a_{m,n}\Big| \le \sum_{n=k(m)+1}^{\infty}|a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2^{m+3}}\,,$$

zatem

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}a_{m,n}\Big)\Big| < \frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{32}+\cdots = \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Niech $r(\varepsilon)$ będzie taką liczbą naturalną, że $\displaystyle\sum_{j=r(\varepsilon)+1}^{\infty}|a_{\sigma(j)}| < \frac{\varepsilon}{4}$. Istnieje taka liczba naturalna $\mu(\varepsilon)$, że

$$\sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{i} \qquad \Big\{\sigma(0),\sigma(1),\ldots,\sigma\big(r(\varepsilon)\big)\Big\}\subseteq$$

$$\subseteq \Big\{(0,0),(0,1),\ldots,\big(0,k(0)\big),(1,0),\ldots,\big(1,k(1)\big),\ldots,\big(\mu(\varepsilon),0\big),\ldots,\big(\mu(\varepsilon),k[\mu(\varepsilon)]\big)\Big\}$$

Niech $\rho(\varepsilon)$ oznacza taką liczbę naturalną, że

$$\Big\{(0,0),(0,1),\ldots,\big(0,k(0)\big),(1,0),\ldots,\big(1,k(1)\big),\ldots,\big(\mu(\varepsilon),0\big),\ldots,\big(\mu(\varepsilon),k[\mu(\varepsilon)]\big)\Big\}$$
$$\subseteq \Big\{\sigma(0),\,\sigma(1),\,\sigma(2),\,\ldots,\,\sigma\big[\rho(\varepsilon)\big]\Big\}.$$

Wtedy zachodzą nierówności

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)-\sum_{j=0}^{\infty}a_{\sigma(j)}\Big| \le \Big|\sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)\Big| +$$
$$+\Big|\sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=0}^{k(m)}a_{m,n}\Big)-\sum_{j=0}^{\rho(\varepsilon)}a_{\sigma(j)}\Big| + \Big|\sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}a_{m,n}\Big)\Big| + \Big|\sum_{j=\rho(\varepsilon)+1}^{\infty}a_{\sigma(j)}\Big| \le$$
$$\le \sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big)+\sum_{j=r(\varepsilon)+1}^{\rho(\varepsilon)}|a_{\sigma(j)}|+\sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}|a_{m,n}|\Big)+\sum_{j=\rho(\varepsilon)+1}^{\infty}|a_{\sigma(j)}| <$$
$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon\,.$$

Ponieważ ε oznacza dowolną liczbę dodatnią, więc zachodzi równość

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{\sigma(j)}\,.$$

W ten sposób zakończyliśmy omawianie zmian kolejności sumowania szeregów podwójnych. Twierdzenie to przyda się nam do wykazania, że złożenie funkcji analitycznych jest funkcją analityczną.

Zaczniemy od definicji funkcji analitycznej.

Definicja 13.2 (funkcji analitycznej)

Funkcję f określoną na otoczeniu punktu p nazywamy analityczną w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (a_n) taki, że dla pewnej liczby $r>0$ równość $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n$ zachodzi dla każdego x, dla którego $|x-p|<r$. Jeśli funkcja f jest analityczna w każdym punkcie zbioru A, to mówimy, że jest analityczna w zbiorze A. ■

Przykład 13.1 Każdy wielomian jest funkcją analityczną w $\mathbb{R}$ a nawet w $\mathbb{C}$. Niech $w(x)=\sum\limits_{n=0}^{d}a_nx^n$, $a_d\neq 0$. Przyjmując $a_n=0$ dla $n>d$ możemy napisać $w(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. Wobec tego

$$w(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-p+p)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{d}a_n\tbinom{n}{j}(x-p)^jp^{n-j}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{j}(x-p)^jp^{n-j}=$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{j}(x-p)^jp^{n-j}=\sum_{j=0}^{\infty}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{j}p^{n-j}\Big](x-p)^j=$$
$$=\sum_{j=0}^{d}\Big[\sum_{n=j}^{d}a_n\tbinom{n}{j}p^{n-j}\Big](x-p)^j=\sum_{j=0}^{d}\tfrac{w^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j\,.$$

Podaliśmy dowód bezpośredni, ale oczywiście ten wzór wynika też z wzoru Lagrange'a na $(k+1)$–ą resztę we wzorze Taylora. ■

Twierdzenie 13.3 (o analityczności sumy szeregu potęgowego)

Jeśli $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n$ dla każdego x, dla którego $|x-p|<r$, gdzie $r>0$ i $|q-p|<r$, to dla każdego x takiego, że $|x-q|<r-|p-q|$ zachodzi równość

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{f^{(n)}(q)}{n!}(x-q)^n\,,$$

zatem funkcja f jest analityczna w kole o środku p i promieniu r.

Dowód. Z twierdzenia o pochodnej szeregu potęgowego wynika, że

$$f^{(j)}(q)=\sum_{n=j}^{\infty}n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j+1)a_n(q-p)^{n-j}=\sum_{n=j}^{\infty}j!\tbinom{n}{j}a_n(q-p)^{n-j}\,.$$

Możemy więc napisać, że

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-q+q-p)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x-q)^j(q-p)^{n-j}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}(x-q)^j(q-p)^{n-j}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{n}{j}(x-q)^j(q-p)^{n-j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(x-q)^j\sum_{n=j}^{\infty}a_n\binom{n}{j}(q-p)^{n-j}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(q)}{j!}(x-q)^j\,,$$

jeśli tylko potrafimy uzasadnić zmianę kolejności sumowania. Kolejność sumowania może być zmieniona, bowiem

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a_n|\binom{n}{j}|x-q|^j|q-p|^{n-j}=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\big(|x-q|+|q-p|\big)^n<\infty\,,$$

bo $|x-q|+|q-p|<r$. W istocie rzeczy korzystamy w tym miejscu jedynie z tego, ze suma szeregu bezwzględnie zbieżnego jest niezależna od kolejności, w jakiej sumujemy jego wyrazy. ■

Uwaga 12.4 Oczywiście promień zbieżności szeregu potęgowego może ulec zmianie. Funkcja $\frac{1}{x}$ jest analityczna w punkcie 1, bowiem

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1+1}\overset{|x-1|<1}{=\!=\!=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\,.$$

Jest też analityczna w dowolnym punkcie $p\neq 0$, bowiem

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x-p+p}=\frac{1}{p(1+\frac{x-p}{p})}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{p-x}{p}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{n+1}}(x-p)^n\,.$$

Bez trudu stwierdzamy, że promień zbieżności równy jest w tym przypadku $|p|$, jasne jest więc, że przechodząc od 1 do $\frac{1}{2}$ zmniejszamy promień, a przechodząc od 1 do $\frac{3}{2}$ — zwiększamy. To ostatnie stwierdzenie wynika z zachowania się tej akurat funkcji, oczywiście w innych przypadkach może być inaczej. ■

Twierdzenie 13.5 (**o analityczności złożenia funkcji analitycznych**)
Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p a funkcja g jest analityczna w punkcie $f(p)$, to złożenie tych funkcji jest analityczne w punkcie p.

Dowód. Załóżmy, że $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n$, jeśli $|x-p|<r$ i $r>0$ oraz $g(y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n\big[y-f(p)\big]^n$, jeśli $|y-f(p)|<\rho$, $\rho>0$. Ponieważ funkcja zdefiniowana szeregiem potęgowym jest ciągła i szereg potęgowy jest wewnątrz swego przedziału (koła) zbieżności jest zbieżny bezwzględnie, więc istnieje liczba dodatnia

$r_0 < r$ taka, że jeśli $|x-p| < r_0$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot|x-p|^n < \rho$. Wynika stąd, że $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|b_j|\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot|x-p|^n\Big)^j < \infty$, dzięki czemu możemy zmieniać kolejność sumowania dowolnie. Z twierdzenia o mnożeniu szeregów wynika, że można szereg potęgowy podnieść do dowolnej naturalnej potęgi. W wyniku otrzymujemy szereg potęgowy. Niech $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot(x-p)^n\Big)^j = \sum\limits_{n=j}^{\infty}a_{j,n}(x-p)^n$. Z nierówności trójkąta wynika, że prawdziwa jest nierówność $\sum\limits_{n=j}^{\infty}|a_{j,n}|\cdot|x-p|^n \le \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot|x-p|^n\Big)^j$. Wobec tego w szeregu podwójnym $\sum\limits_{j=0}^{\infty}b_j\sum\limits_{n=j}^{\infty}a_{j,n}(x-p)^n$ można zmieniać kolejność wyrazów dowolnie nie wpływając na jego zbieżność ani sumę. Mamy więc

$$\sum_{j=0}^{\infty}b_j\sum_{n=j}^{\infty}a_{j,n}(x-p)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}b_j\,a_{j,n}(x-p)^n .$$

Dowód został zakończony. ■

Następne twierdzenie, którym się zajmiemy zwykle nie jest dowodzone w ramach wykładu z analizy na pierwszym roku i studenci poznają je na wykładzie z funkcji analitycznych z zupełnie innym dowodem niż pochodzący od Cauchy'ego, który przedstawimy za chwilę.

Twierdzenie 13.6 (o analityczności funkcji odwrotnej)
Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p i $f'(p)\neq 0$, to po ograniczeniu jej dziedziny do dostatecznie małego otoczenia punktu p otrzymujemy funkcję różnowartościową, której funkcja odwrotna jest analityczna.

Dowód. Ponieważ funkcje: T przypisująca liczbie y liczbę $y-f(p)$ i funkcja S przypisująca liczbie x liczbę $x+p$ są analityczne i odwrotne do nich też, więc możemy zająć się istnieniem funkcji odwrotnej do funkcji $g := T\circ f\circ S$. Jeśli zdołamy wykazać, że to złożenie ma funkcję odwrotną, to będziemy mogli napisać, że prawdziwy jest wzór $f^{-1} = S\circ(T\circ f\circ S)^{-1}\circ T$, więc na mocy poprzedniego twierdzenia funkcja f^{-1} okaże się być funkcją analityczną. Oczywiście $g(0) = T\circ f\circ S(0) = 0$. Niech $g(x) = T\circ f\circ S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$.* Oczywiście $a_1 = g'(0) = f'(p)\neq 0$. Chcemy udowodnić, że funkcja g^{-1} jest analityczna w punkcie 0.

*Na wykładzie wykazałem, że można ograniczyć się do przypadku $a_1=1$, ale tu z tego nie korzystam. W tym przypadku byłoby $b_1=1$.

Załóżmy, że $g^{-1}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ dla dostatecznie małych $|x|$. Udowodnimy, że ta równość wyznacza liczby $b_1, b_2, \ldots$. Wynika z niej i z twierdzenia o złożeniu funkcji analitycznych, że w pewnym otoczeniu 0 spełniona jest równość

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j\Big)^n =$$

$$= a_1\big(b_1x + b_2x^2 + \cdots\big) + a_2\big(b_1x + b_2x^2 + \cdots\big)^2 + a_3\big(b_1x + b_2x^2 + \cdots\big)^3 + \cdots.$$

Zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy:

$$x = a_1b_1x + \big[a_1b_2 + a_2b_1^2\big]x^2 + \big[a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3\big]x^3 +$$
$$+\big[a_1b_4 + 2a_2b_1b_3 + a_2b_2^2 + 3a_3b_1^2b_2 + a_4b_1^4\big]x^4 + \cdots.$$

Wynika z tej równości, że

$$b_1 = \frac{1}{a_1}\,;$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_1}\,\big[a_2b_1^2\big]\,;$$

$$b_3 = -\frac{1}{a_1}\,\big[2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3\big]\,;$$

$$b_4 = -\frac{1}{a_1}\,\big[2a_2b_1b_3 + a_2b_2^2 + 3a_3b_1^2b_2 + a_4b_1^4\big]$$

Widzimy więc, że udaje się obliczyć kolejno $b_1, b_2, \ldots$ Wobec tego możliwe jest napisanie wzoru na funkcję odwrotną w postaci szeregu potęgowego, co nieomal kończy dowód. Pozostaje jednak kwestia zbieżności otrzymanego szeregu. Teoretycznie mogłoby się zdarzyć, że promień zbieżności otrzymanego szeregu równy jest 0.

Zajmiemy się teraz opisanym problemem. Ponieważ promień zbieżności szeregu $\sum a_n x^n$ jest dodatni, więc istnieje liczba $c > 0$, dla której szereg $\sum a_n c^n$ jest zbieżny bezwzględnie. Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c^n = 0$, zatem ciąg $\big(a_n c^n\big)$ jest ograniczony. Oznacza to, że istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $|a_n c^n| \le M$, zatem $|a_n| \le Mc^{-n}$. Zdefiniujemy pomocniczą funkcję analityczną $h(x) = |a_1|x - Mc^{-2}x^2 - Mc^{-3}x^3 - \cdots$. Znajdujemy współczynniki $d_1, d_2, \ldots$ szeregu Maclaurina funkcji h^{-1}. Wyrazić je można za pomocą tych samych wzorów, które otrzymaliśmy w przypadku współczynników funkcji g^{-1} z tym tylko, że liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zastępujemy kolejno liczbami $|a_1|, -Mc^{-2}, -Mc^{-3}, \ldots$. Mamy więc

$d_1 = \frac{1}{|a_1|} \ge |b_1|$,

$d_2 = -\frac{1}{|a_1|}\,\big[-Mc^{-2}d_1^2\big] = \frac{1}{|a_1|}\,\big[Mc^{-2}d_1^2\big] \ge \Big|-\frac{1}{a_1}\,\big[a_2b_1^2\big]\Big| = |b_2|$,

$d_3 = -\frac{1}{|a_1|}\left[-2Mc^{-2}d_1d_2 - 2Mc^{-3}d_1^3\right] = \frac{1}{|a_1|}\left[2Mc^{-2}d_1d_2 + 2Mc^{-3}d_1^3\right] \geq$
$\geq \left| -\frac{1}{a_1}\left[2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3\right]\right| = |b_3|$.

Analogicznie $d_4 \geq |b_4|$ itd. (INDUKCJA!). Wynika stąd, że wystarczy wykazać, że promień zbieżności szeregu $\sum d_n x^n$ jest dodatni!* Mamy

$y = h(x) = |a_1|x - Mc^{-2}x^2 - Mc^{-3}x^3 - \cdots = |a_1|x - \frac{Mc^{-2}x^2}{1-c^{-1}x} = \frac{|a_1|c^2x-(|a_1|c+Mx^2)}{c^2-cx}$,

czyli $(|a_1|c+M)x^2 - (cy + a_1c^2)x + c^2y = 0$. Otrzymane równanie kwadratowe rozwiązujemy bez trudu:

$$x = \frac{1}{2(|a_1|c+M)}\left[(cy+|a_1|c^2) \pm \sqrt{(cy+|a_1|c^2)^2 - 4c^2y(|a_1|c+M)}\right].$$

Ponieważ $h(0)=0$, więc również $h^{-1}(0)=0$. Oznacza to, że

$$x = \frac{1}{2(|a_1|c+M)}\left[(cy+|a_1|c^2) - \sqrt{(cy+|a_1|c^2)^2 - 4c^2y(|a_1|c+M)}\right].$$

Wyraziliśmy x jako funkcję zmiennej y i to funkcję analityczną, bowiem złożenie funkcji analitycznych, suma i różnica funkcji analitycznych są funkcjami analitycznymi, wielomian jest funkcją analityczną, pierwiastek kwadratowy też, bo jeśli $q>0$, to

$$\sqrt{x} = \sqrt{q+x-q} = \sqrt{q}\cdot\sqrt{1+\frac{x-q}{q}} = \sqrt{q}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(\frac{x-q}{q}\right)^n$$

— skorzystaliśmy z szeregu dwumianowego Newtona, promieniem zbieżności otrzymanego szeregu potęgowego jest liczba $|q|$.Dowód został zakończony. ■

Z udowodnionych twierdzeń wynika od razu, że funkcje analityczne w ustalonym punkcie tworzą zbiór zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez te, które nie przyjmują wartości 0. Można je też składać i odwracać. Wyjaśnia to, dlaczego praktycznie wszystkie, którymi się zajmujemy, są analityczne, czasem z wyjątkiem nielicznych punktów, jak np. funkcja $x^{13}|x|$, która nie jest analityczna w punkcie 0. Bardziej ambitny przykład to funkcja zdefiniowana równościami $f(x)=0$ dla $x\leq 0$ i $f(x)=e^{-1/x}$ dla $x>0$. Ta funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna. Mamy $f^{(n)}(0)=0$ dla $n=1,2,\ldots$. Gdyby była analityczna w punkcie 0, to zachodziłaby równość $f(x) = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0^2}{2!}x^2 + \cdots = 0$ dla dostatecznie małych $|x|$, ale tak nie jest dla **żadnego** $x>0$.

Twierdzenie 13.7 (Zasada identyczności)
Jeśli funkcje analityczne f i g pokrywają się w punktach zbioru, który ma punkt skupienia p, to pokrywają się w pewnym otoczeniu punktu p.

Dowód. Niech $f(x_n) = g(x_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ i $n \neq m \Longrightarrow x_n \neq x_m$. Załóżmy,

* Ze zbieżności szeregu o większych, nieujemnych wyrazach wynika zbieżność szeregu o mniejszych nieujemnych wyrazach.

że $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n$ i $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(x-p)^n$, gdy $|x|$ jest dostatecznie małą liczbą. Mamy $a_0=f(p)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=g(p)=b_0$. Wobec tego dla każdego j zachodzi równość $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_j-p)^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x_j-p)^{n-1}$ — otrzymujemy ją dzieląc równość $f(x)-a_0=g(x)-b_0$ stronami przez x_j-p. Z tej równości i ciągłości funkcji analitycznych $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_j-p)^{n-1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x_j-p)^{n-1}$ wynika, że $a_1=\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_j-p)^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x_j-p)^{n-1}=b_1$. To rozumowanie indukcyjne można kontynuować. W rezultacie równość $a_n=b_n$ ma miejsce dla wszystkich liczb naturalnych n, co dowodzi, że w całym przedziale zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x_j-p)^n$ zachodzi równość $f(x)=g(x)$. ■

Przykład 13.2 Tangens jest funkcją analityczną we wszystkich punktach x, w których $\cos x\neq 0$. Wynika to z tego, że $\operatorname{tg}x=\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}$. Funkcje sinus i kosinus są analityczne w całej prostej (w całej płaszczyźnie), bo promienie zbieżności ich szeregów Maclaurina są równe $+\infty$. Funkcja $\frac{1}{x}$ jest analityczna w każdym punkcie $p\neq 0$. Wynika stąd, że funkcja $\frac{1}{\cos x}$ jest złożeniem funkcji analitycznych i wobec tego też jest analityczna. Wobec tego tangens jest iloczynem dwu funkcji analitycznych, zatem jest funkcją analityczną. Podkreślić wypada, że od tego stwierdzenia do uzyskania rozwinięcia tangensa np. w szereg Maclaurina droga nie jest krótka. Można natomiast wyliczać współczynniki tego rozwinięcia korzystając z równości $(\operatorname{tg}x)'=1+\operatorname{tg}^2x$: jeśli $\operatorname{tg}x=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots$ ($0=a_0=a_2=a_4=\ldots$, bo $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$), to $a_1+3a_3x^2+5a_5x^4+\cdots=1+(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots)^2=$ $=1+a_1^2x^2+2a_1a_3x^4++(2a_1a_5+a_3^2)x^6+(2a_1a_7+2a_3a_5)x^8$, co prowadzi do równości $a_1=1$, $3a_3=a_1^2$, $5a_5=2a_1a_3$, ... a z nich możemy kolejno obliczyć $a_1,a_3,a_5,\ldots$ ■

Zadanie. Załóżmy, że $f(x)=2x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^n$, gdy $|x|<r$, $r>0$. Wykazać, że istnieje taka funkcja h analityczna w pewnym otoczeniu punktu 0, że $h(0)=0$, $h'(0)=1$ i $2h(x)=h(f(x))$ dla dostatecznie małych $|x|$.

Zachęcam do zrobienia tego zadania, to niezbyt trudne ćwiczenie, którego zrobienia powinno ułatwić rzeczywiste zrozumienie opisanej w dowodzie o analityczności funkcji odwrotnej metody Cauchy'ego, a jednocześnie fragment (mały) dosyć znanego w niektórych kręgach twierdzenia Henri Poincarégo.