-

Całki niewłaściwe

Definicja 11.1 (Długości wykresu funkcji)
Długość wykresu funkcji $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest równa kresowi górnemu długości łamanych wpisanych w wykres, tj. liczb postaci $\sum_{j=1}^{n}\sqrt{(x_j-x_{j-1})^2+\big(f(x_j)-f(x_{j-1})\big)^2}$, gdzie $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. ■

Załóżmy, że funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i że jej pochodna f' jest całkowalna na przedziale $[a,b]$. Wtedy całkowalna w sensie Riemanna jest też funkcja $\sqrt{1+f'(x)^2}$.

Niech $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. Niech l_i oznacza długość odcinka łączącego punkty $\big(x_{i-1},f(x_{i-1})\big)$ i $\big(x_i,f(x_i)\big)$. Mamy więc

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje taka liczba $t_i\in(x_{i-1},x_i)$, że zachodzi równość

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+f'(t_i)^2(x_i-x_{i-1})^2}=(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+(f'(t_i)^2)}\,.$$

Stąd wynika, że długość łamanej równa jest

$$l_1+l_2+\ldots+l_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+(f'(t_i)^2)}\,.$$

Z nierówności trójkąta wynika, że w wyniku dodania nowych punktów podziału, długość łamanej wzrośnie, a przynajmniej się nie zmniejszy. Stąd wynika, że można zakładać, że $0<x_j-x_{j-1}<\delta$ dla dowolnej liczby $\delta>0$. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 11.2 (o długości wykresu funkcji)
Długość wykresu funkcji f jest równa $\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. ■

Ten wynik jest bardzo jasny z punktu widzenia fizyki. Załóżmy, że wykres funkcji to np. szosa, po której porusza się samochód w ten sposób, że składowa pozioma wektora prędkości równa jest 1. Niech x oznacza czas. Wtedy w chwili x znajdujemy się w punkcie $\big(x,f(x)\big)$ — zakładamy, że startujemy z punktu $\big(a,f(a)\big)$, wtedy $f'(x)$ mierzy prędkość zmian wartości funkcji f w chwili x, jest więc to druga składowa wektora prędkości naszego pojazdu. Jego prędkością skalarną jest więc długość wektora prędkości, czyli liczba $\sqrt{1+(f'(x))^2}$, ta prędkość jest oczywiście zależna od czasu. Przebytą drogę należy obliczać mnożąc czas przez prędkość. Ponieważ prędkość jest zmienna, więc prowadzi to do dzielenia czasu podróży, na krótkie odcinki, w krótkim okresie czasu prędkość jest prawie stała (prędkość jest funkcją ciągłą czasu), następnie mnożymy ten krótki czas przez prędkość z jaką się w nim poruszamy i sumujemy. Otrzymujemy sumę Riemanna funkcji $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$, a po przejściu granicznym (rozpatrywane odcinki czasu są coraz bliższe 0) otrzymujemy całkę $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$. Rozumując analogicznie dojść można do wniosku, że $\int_a^b f(x)\,dx$ jest drogą przebytą przez pojazd poruszający się po prostoliniowej drodze w ten sposób, że w chwili x jego prędkością jest $f(x)$.

Ten argument jest bardzo ważny historycznie: Newton tworzył rachunek różniczkowy i całkowy w silnym związku z fizyką. Po drugie pojęcie prędkości nie jest trudne, przemawia do wyobraźni, więc studenci proszeni są o chwilę zastanowienia nad tym tekstem! Warto też zdać sobie sprawę z tego, że całkowicie analogicznie przyspieszenie jest powiązane z prędkością — po prostu wszędzie zastępujemy *położenie* przez prędkość i jednocześnie *prędkość* przez przyspieszenie. ■

Przykład 11.1 Obliczymy długość łuku paraboli $y = x^2$, który zaczyna się w punkcie $(0,0)$ i kończy się w punkcie $\left(a,a^2\right)$. Zgodnie z poprzedzającymi ten przykład rozważaniami ta długość równa jest $\int_0^a \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$. Podobną całkę obliczaliśmy wcześniej, więc nie będziemy powtarzać obliczeń w istocie rzeczy takich samych. Podstawiając poprzednio otrzymanym wyniku np. $x = 4u$ i w ostatecznym wyniku pisząc x zamiast u otrzymujemy

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \tfrac{x}{4}\sqrt{1+\tfrac{x^2}{4}} + \tfrac{1}{4}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right) + C\,.$$

Stąd wynika, że ten łuk paraboli ma długość $\frac{a}{4}\sqrt{1+\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left(2a+\sqrt{1+4a^2}\right)$. ■

Okazuje się, że wynik jest zadziwiająco skomplikowany. W XIX w. matematykom udało się wykazać, że długośći elipsy, która nie jest okręgiem, nie można wyrazić za pomocą tzw. funkcji elementarnych. Można to zrobić za pomocą tzw. funkcji eliptycznych. Piszemy o tym po to jedynie, by raz jeszcze przestrzec, że mówimy tu jedynie o rzeczach w analizie matematycznej najprostszych, bo te tylko znajdują się w i tak wypełnionych programach studiów.

Obliczymy teraz długość okręgu, a właściwie jego połowy, choć wszyscy dobrze znają wzór, który otrzymamy. Tu rachunek będzie bardzo prosty, a różnica między okręgiem i elipsą tak niewielka. Niewielka ale bardzo istotna: w całce, którą trzeba znaleźć w przypadku elipsy występuje iloraz *dwóch* wielomianów kwadratowych, w przypadku okręgu wielomian jest tylko *jeden*.

Przykład 11.2 Półokrąg o promieniu $r > 0$ możemy potraktować jako wykres funkcji $\sqrt{r^2-x^2}$ zdefiniowanej na przedziale $[-r,r]$. Wobec tego jego długość równa jest

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)'\right)^2}\,dx=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(\tfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\tfrac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\int_{-r}^{r}\tfrac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx\ \overset{x=r\sin t}{\underset{dx=r\cos t\,dt}{=\!=\!=\!=\!=}}\ r\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt=\pi r\,.$$

Otrzymaliśmy więc dobrze znany wynik. ■

Przyjrzawszy się nieco dokładniej ostatniemu przykładowi dostrzeżemy jednak drobne (?) oszustwo. Rzecz w tym, że pochodna funkcji, którą przyszło nam rozpatrywać jest w końcach przedziału nieskończona, więc stosowaliśmy twierdzenie w sytuacji, w której założenia nie są spełnione, co nie brzmi najlepiej. Ten problem pojawia się w wielu sytuacjach. Trzeba więc wyjaśnić nieco dokładniej jak definiujemy całki, które wystąpiły, i co można wnioskować z ich istnienia.

Definicja 11.3 (**całki niewłaściwej**)
Jeśli funkcja $f\colon[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną i istnieje granica $\lim\limits_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$, to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na przedziale $[a,b)$. Stosujemy to samo oznaczenie co dla całki właściwej $\int_a^b f(x)\,dx$. Jeśli całka niewłaściwa jest skończona, to mówimy, że jest *zbieżna*. Jeśli całka $\int_a^b |f(x)|\,dx$ jest zbieżna, to mówimy, że całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest *bezwzględnie* zbieżna. Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą z funkcji określonej na przedziale otwarto–domkniętym $(a,b]$. Jeśli funkcja jest określona na przedziale otwartym (a,b) i istnieją całki niewłaściwe na przedziałach $(a,c]$ i $[c,b)$, to ich sumę, jeśli jest zdefiniowana, nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na przedziale (a,b), stosujemy znów to samo oznaczenie $\int_a^b f(x)\,dx$. Zamiast zakładać, że funkcja f ma funkcję pierwotną można założyć, że jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym z przedziałów postaci $[a,c]$, gdzie $a<c<b$. ■

Przykład 11.3 Obliczymy całkę $\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$. Funkcja nie jest zdefiniowana w żadnym końcu przedziału, więc rozpatrzymy oddzielnie dwie całki: $\int_0^r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$ oraz $\int_{-r}^0\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$. Zachodzi równość $\int\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=\arcsin\frac{x}{r}+C$, zatem

$$\lim_{c\to r^-}\int_0^c\tfrac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=\lim_{c\to r^-}\left(\arcsin\tfrac{c}{r}-\arcsin\tfrac{0}{r}\right)=\arcsin\tfrac{r}{r}=\tfrac{\pi}{2}\,.$$

Analogicznie

$$\lim_{c\to -r^+}\int_c^0\tfrac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=\lim_{c\to -r^+}\left(\arcsin\tfrac{0}{r}-\arcsin\tfrac{-r}{r}\right)=-\arcsin(-1)=\tfrac{\pi}{2}\,.$$

Obie całki są skończone, czyli zbieżne, więc zgodnie z definicją całka $\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$ jest zbieżna do $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$. ■

Przykład 11.4 Obliczymy całkę $\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}\,dx$. Zachodzą równości

$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}\int_0^c \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}(\operatorname{arctg} x)\Big|_0^c = \lim\limits_{c\to\infty}(\operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}\,.$

Całka jest więc skończona, zatem funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ ma całkę niewłaściwą na półprostej $[0,\infty)$, która jest równa $\frac{\pi}{2}$. Z parzystości funkcji $\frac{1}{1+x^2}$ wynika, że zachodzi równość $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi\,.$ ■

Przykład 11.5 Teraz zajmiemy się całką $\int_1^\infty x^a\,dx$ zakładając, że $a\neq -1$. Mamy zatem

$\int_1^\infty x^a\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}\int_1^c x^a\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}\left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right)\Big|_1^c = \lim\limits_{c\to\infty}\frac{c^{a+1}-1}{a+1} = \begin{cases} +\infty & \text{dla } a>-1\,, \\ \frac{-1}{a+1} & \text{dla } a<-1\,. \end{cases}$

Okazało się, że im większy wykładnik tym większa całka. Dla ,,dużych'' wykładników całka jest nieskończona dla ,,małych'' skończona, tym mniejsza im mniejszy wykładnik. Oczywiście słowa ,,mały'' i ,,duży'' mają znaczenie umowne. ■

Przykład 11.6 Obliczymy $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$ zakładając, że $\lambda>0$, w przypadku $\lambda\le 0$ wartości funkcji podcałkowej nie są mniejsze niż 1, więc całka jest nieskończona, bo musi być większa od pola prostokąta o wysokości 1 i dowolnie długiej podstawie. Mamy $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}\int_0^c e^{-\lambda x}\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^c \overset{\lambda>0}{=\!=} \frac{1}{\lambda}$. Wykazaliśmy, że dla każdej liczby $\lambda>0$ funkcja $e^{-\lambda x}$ ma skończoną całkę niewłaściwą na półprostej $[0,\infty)$. ■

Przykład 11.7 Wykażemy teraz, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ jest skończona. Mamy $e^{x^2}\ge 1+x^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x, więc $\int_0^c e^{-x^2}\,dx \le \int_0^c \frac{1}{1+x^2}\,dx < \frac{\pi}{2}$. Całka $\int_0^c e^{-x^2}\,dx$ rośnie wraz z c, oczywiście teraz rozważamy tylko $c>0$. Wobec tego granica $\lim\limits_{c\to\infty}\int_0^c e^{-x^2}\,dx$ istnieje i jedyną kwestią jest to, czy jest ona skończona. Ponieważ dla każdej liczby $c>0$ wartość całki jest mniejsza niż $\frac{\pi}{2}$, więc zachodzi nierówność $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}\int_0^c e^{-x^2}\,dx \le \frac{\pi}{2}$. Spełniliśmy obietnicę: udowodniliśmy, że całka jest skończona. ■

Widać z powyższych przykładów, że powody, dla których trzeba rozpatrywać czasem całki nieoznaczone, bywają różne. Możemy mieć do czynienia z nieograniczoną funkcja lub z nieograniczoną dziedziną funkcji. Wypada stwierdzić, że jedną z podstawowych różnic między całką Riemanna i całką niewłaściwą jest to, że w wypadku całki niewłaściwej nie jest prawdziwe twierdzenie o sumach Riemanna. Różnica między całką niewłaściwą i jej sumą Riemanna może być dowolnie duża nawet dla bardzo drobnego podziału dziedziny: wystarczy wybrać odpowiednie punkty w przedzialikach, które tworzą ten podział. Jeśli np. rozważamy całkę $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, to dzieląc przedział $[0,1]$ punktami $0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=1$ na

krótkie przedzialiki, nie jesteśmy w stanie uniknąć tego, że w przedziale $[x_{n-1}, x_n)$ funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ przyjmuje wartości dowolnie duże. Możemy więc wybrać w nim punkt t_n w taki sposób, by liczba $\frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{1-t_n^2}}$ była większa niż np. 1410, co spowoduje, że niezależnie od tego jak wybierzemy punkty w pozostałych przedzialikach wartość sumy Riemanna będzie wielokrotnie przewyższać długość okręgu o promieniu 1. Oczywiście stwarza to problemy z interpretacją całki, ale nic na to nie można poradzić.

Całki niewłaściwe pojawiają się w naturalny sposób, bo przecież nie można uznać obliczania długości okręgu za zadanie bardzo sztuczne. Po prostu należy stosować je ostrożniej, ale należy to robić. We wspomnianym przypadku można np. twierdzić, że rozpatrując nieco krótszy łuk odpowiadający przedziałowi $[0,c)$ możemy go przybliżać całką, całka $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ różni się minimalnie od całki $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, więc sumy Riemanna pierwszej z nich, więc właściwej, przybliżają ją więc krótszy łuk, ale ten krótszy przybliża dłuższy, więc suma Riemanna całki $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ przybliża ćwierć długości okręgu o promieniu 1. Ten przykład pokazuje jak można powstające problemy rozwiązywać. W dalszym ciągu będziemy przyjmować, że opisane wcześniej interpretacje całek właściwych (długości, pola, prędkości) zachowują sens również w wypadku całek niewłaściwych.

Czytelnicy z pewnością zauważyli pewne podobieństwa między całkami niewłaściwymi i szeregami, nawet terminologia jest w podobna. Omówimy teraz twierdzenia, które to podobieństwo nieźle uwidocznią. Zaczniemy od warunku koniecznego i dostatecznego na zbieżność całki.

Twierdzenie 11.4 (warunek Cauchy'ego zbieżności całki niewłaściwej)
Jeśli dla każdego $x \in (a,b)$ funkcja $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna na przedziale $[a,x]$, to całka $\int_a^b f(t)\,dt$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $c_\varepsilon \in (a,b)$ takie, że jeśli $c_\varepsilon < x_1, x_2 < b$, to

$$\varepsilon > \left| \int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_2} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right|.$$

Dowód. To twierdzenie wynika od razu z twierdzenia mówiącego, że funkcja ma skończoną granicę w punkcie b wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest odpowiedni warunek Cauchy'ego. ■

Twierdzenie 11.5 (Kryterium całkowe Cauchy'ego Maclaurina zbieżności szeregu)
Jeśli funkcja $f\colon [1,\infty] \longrightarrow [0,\infty)$ jest nierosnąca, to szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka niewłaściwa $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Dowód. Nie ma oczywiście żadnego problemu z istnieniem całek $\int_1^c f(x)\,dx$, bo ich istnienie jest konsekwencją monotoniczności funkcji f. Podobnie szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ ma sumę, być może nieskończoną, bo jego wyrazy są nieujemne. Ponieważ funkcja f jest nierosnąca, więc nierówność $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$ ma miejsce dla każdej liczby naturalnej n. Stąd od razu wynika, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{\infty} f(n),$$

a z tej nierówności teza twierdzenia wynika natychmiast. ■

Uwaga 11.6

Jeśli funkcja $f\colon [1,\infty] \longrightarrow [0,\infty)$ jest nierosnąca i całka $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. ■

Ćwiczonko: Podać przykład takiej funkcji $f\colon [1,\infty] \longrightarrow [0,\infty)$, dla której całka $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna, chociaż $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

Następne twierdzenie przyda się do dowodu odpowiednika twierdzeń Abela i Dirichleta mówiących o zbieżności szeregu.

Twierdzenie 11.7 (**drugie o wartości średniej**)

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, funkcja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — monotoniczna, to istnieje liczba $c \in [a,b]$ taka, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Dowód. Założymy najpierw, że funkcje f,g są wielomianami. Definiujemy nową funkcję: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Mamy

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(t)g'(t)\,dt.$$

Ponieważ funkcja g jest monotoniczna, więc jej pochodna g' jest nieujemna albo niedodatnia. Wynika stąd, że istnieje liczba $c \in [a,b]$ taka, że

$$\int_a^b F(t)g'(t)\,dt = F(c)\int_a^b g'(t)\,dt = F(c)[g(b) - g(a)].$$

Wobec tego

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)[g(b)-g(a)] =$$
$$= g(a)[F(c) - F(a)] + g(b)[F(b) - F(c)] = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Udowodniliśmy twierdzenie w tym przypadku.

Teraz przejdziemy do sytuacji ogólnej. Niech $M > 0$ będzie taką liczbą, że dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzą nierówności $|f(x)|, |g(x)| < M$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że g jest funkcją niemalejącą. Niech f_n, g_n będą takimi wielomianami, że $\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx < \frac{1}{n}$ i $\int_a^b |g(x) - g_n(x)|\,dx < \frac{1}{n}$ oraz $|f_n(x)|, |g(x)| \leq M$.

Możemy założyć, że wielomian g_n jest funkcją ściśle rosnącą oraz że $g_n(a) = g(a)$ i $g_n(b) = g(b)$ dla każdego n. Z już udowodnionej części twierdzenia wynika, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba $c_n \in [a,b]$, że

$$\int_a^b f_n(x)g_n(x)\,dx = g(a)\int_a^{c_n} f(x)\,dx + g(b)\int_{c_n}^b f(x)\,dx\,.$$

Ciąg (c_n) może nie mieć granicy, ale można z niego wybrać podciąg zbieżny c_{n_k}. Niech $c = \lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k}$. Mamy teraz

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)g_n(x)\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^b \big[f(x)-f_n(x)\big]g(x)\,dx + \int_a^b f_n(x)\big[g(x)-g_n(x)\big]\,dx\right| < \tfrac{1}{n}(b-a)M \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

Podobnie

$$\left|\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^{c_{n_k}} f_{n_k}(x)\,dx\right| \le \int_a^{c_{n_k}} \big|f(x)-f_{n_k}(x)\big|\,dx + \left|\int_c^{c_{n_k}} f(x)\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b \big|f(x)-f_{n_k}(x)\big|\,dx + |c-c_{n_k}|\cdot M < \tfrac{1}{n_k} + |c-c_{n_k}|\cdot M \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,,$$

$$\left|\int_c^b f(x)\,dx - \int_{c_{n_k}}^b f_{n_k}(x)\,dx\right| \le \int_{c_{n_k}}^b \big|f(x)-f_{n_k}(x)\big|\,dx + \left|\int_c^{c_{n_k}} f(x)\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b \big|f(x)-f_{n_k}(x)\big|\,dx + |c-c_{n_k}|\cdot M < \tfrac{1}{n_k} + |c-c_{n_k}|\cdot M \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$, $\lim\limits_{k\to\infty}\Big[g_{n_k}(a)\int_a^{c_{n_k}} f_{n_k}(x)\,dx\Big] = g(a)\int_a^c f(x)\,dx$ i $\lim\limits_{k\to\infty}\Big[g_{n_k}(b)\int_{c_{n_k}}^b f_{n_k}(x)\,dx\Big] = g(b)\int_c^b f(x)\,dx$, a z tych równości teza wynika od razu. ■

Twierdzenie 11.8 (Abela–Dirichleta dla całek)

Niech $g\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną i ograniczoną i niech będzie spełnione jedno z założeń

(i) całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ istnieje i jest skończona;

(ii) dla każdego $x > a$ istnieje $\int_a^x f(t)\,dt$ i istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla dowolnych $x_1, x_2 > a$ zachodzi nierówność $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \le M$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Wtedy całka $\int_a^\infty f(t)g(t)\,dt$ jest zbieżna.

Dowód. Należy sprawdzić, że jest spełniony warunek Cauchy'ego zbieżności całki niewłaściwej. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Ponieważ funkcja g jest monotoniczna, więc dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in (a,\infty)$, $x_1 < x_2$, istnieje liczba $c \in (x_1, x_2)$ taka, że $\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\,dt = g(x_1)\int_{x_1}^c f(t)\,dt + g(x_2)\int_c^{x_2} f(t)\,dt$. Załóżmy, że spełniony jest warunek (i). Niech $M > 0$ będzie taką liczbą, że dla każdego $x \in (a,\infty)$ zachodzi $|g(x)| \le M$. Ponieważ całka $\int_a^x f(t)\,dt$ jest zbieżna, więc istnieje liczba $d > a$ taka, że jeżeli $x_1, x_2 > d$, to $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Stąd i z poprzednio napisanej równości wynika, że jeśli $d < x_1 < x_2$, to

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\,dt\right| \le \left|g(x_1)\int_{x_1}^c f(t)\,dt + g(x_2)\int_c^{x_2} f(t)\,dt\right| < M\cdot\tfrac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\tfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\,.$$

Drobne zmiany w tym dowodzi niezbędne dla przeprowadzenia dowodu przy założeniu warunku (ii) czytelnik z łatwością wprowadzi sam. ■

Przykład 11.8 Wykażemy, że całka $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ jest zbieżna, choć nie jest to zbieżność bezwzględna.

Jeśli n jest liczbą naturalną i $a_n := \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{6}} \le x \le \sqrt{2n\pi + \frac{5\pi}{6}} := b_n$, to $\sin x^2 \ge \frac{1}{2}$. Wobec tego

$$\int_0^\infty |\sin x^2|\,dx \ge \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} |\sin x^2|\,dx \ge \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2}(b_n - a_n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi/3}{2(\sqrt{2n\pi+5\pi/6}+\sqrt{2n\pi+\pi/6})} \ge \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{(2n+1)\pi}} = \infty\,,$$

co kończy dowód rozbieżności całki $\int_0^\infty |\sin x^2|\,dx$.

Łatwo można zauważyć, że $\int_1^\infty \sin x^2\,dx \overset{t=x^2}{\underset{dt=2x\,dx}{=\!=\!=}} \int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t\,dt$. Zachodzi nierówność: $\left|\int_1^x \sin t\,dt\right| = |\cos 1 - \cos x| < 2$, funkcja $\frac{1}{\sqrt{t}}$ jest malejąca i zbieżna do 0 przy $t \longrightarrow \infty$, zatem całka $\int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t\,dt$ jest zbieżna. Stąd i z całkowalności funkcji $\sin x^2$ na przedziale $[0,1]$ wynika zbieżność całki $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$. ■

Przykład 11.9 Całka $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie. Oczywiście w punkcie 0 nie ma osobliwości, bowiem $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zbieżność całki $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ wynika od razu z kryterium Abela–Dirichleta. Brak zbieżności bezwzględnej wynika z tego, że jeśli $2n\pi + \frac{\pi}{6} \le x \le 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$, to $\sin x \ge \frac{1}{2}$ oraz z rozbieżności szeregu harmonicznego. ■

Wallis, Stirling, Poisson

Niech $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Dla $n \ge 2$ mamy wtedy $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = I_n =$
$= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\sin^{n-2} x\,dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \cos x\big(\sin^{n-1} x\big)'\,dx =$
$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\cos x\big(\sin^{n-1} x\big)\Big|_0^{\pi/2} = I_{n-2} - 0 + \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = I_{n-2} + \frac{1}{n-1} I_n$.
Stąd mamy

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}\,.$$

Mamy też $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ i $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$. Wynika stąd, że

$$I_{2n} = \tfrac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \ldots = \tfrac{2n-1}{2n}\cdot\tfrac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\tfrac{1}{2}\cdot I_0 = \tfrac{2n-1}{2n}\cdot\tfrac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2} =$$
$$= \frac{(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{2n\cdot 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Analogicznie

$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \ldots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 =$

$$= \frac{2n \cdot 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n) \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 0$ zachodzi nierówność $I_n \geq I_{n+1} \geq I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. Wynika z niej, że $1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$. Mamy więc

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n \cdot 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1} \cdot \frac{2}{\pi}\,.$$

Wobec tego możemy napisać

Twierdzenie 11.9 (wzór Wallisa)

$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n \cdot 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots}$

— oczywiście ostatni napis oznacza granicę, więc ostatnią równość należy traktować jako definicję symbolu występującego po prawej stronie. ■

Zajmiemy się teraz przybliżeniem $n!$ dla dużych n. Chodzi o to, by znaleźć wyrażenie, za pomocą którego można będzie przybliżać silnię. Ona na ogół występuje jako czynnik jakiegoś iloczynu, więc chodzi o wyrażenie, które podzielone przez $n!$ będzie dążyć do 1, wielkich szans na to by różnica dążyła do 0 nie ma, jeśli chcemy znaleźć prosty wzór oczywiście nie zawierający silni. Ponieważ $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, więc przyjrzymy się ilorazowi dwóch kolejnych wyrazów ciągu $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$, by zrozumieć, jak szybko ten ciąg dąży do 0. Mamy $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$. Rozważymy więc ciąg zdefiniowany wzorem $a_n = n! \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n$. Z poprzednio uzyskanych równości wnioskujemy, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \cdot \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Mamy dalej

$\ln a_n = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1\right) =$

$= \ln\left(e \cdot \left[1 + \frac{1}{n-1}\right]^{-n+1}\right) + \ln\left(e \cdot \left[1 + \frac{1}{n-2}\right]^{-n+2}\right) + \cdots + \ln\left(e \cdot \left[1 + \frac{1}{1}\right]^{-1}\right) + \ln e =$

$= \Big(1 - (n-1)\ln\left[1 + \frac{1}{n-1}\right]\Big) + \Big(1 - (n-2)\ln\left[1 + \frac{1}{n-2}\right]\Big) + \cdots + \Big(1 - \ln\left[1 + \frac{1}{1}\right]\Big) + 1\,.$

Przyjrzymy się jednemu składnikowi. Mamy

$1 - k\ln\left[1 + \frac{1}{k}\right] = 1 - k\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{4k^4} + \cdots\right] = \frac{1}{2k} - \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{4k^3} - \cdots = \frac{1}{2k} - b_k$,

gdzie $b_k = \frac{1}{3k^2} - \frac{1}{4k^3} + \cdots \in \left(\frac{1}{3k^2} - \frac{1}{4k^3}, \frac{1}{3k^2}\right)$. Wyrazy szeregu zbieżnego $\sum b_n$ są dodatnie, więc jego ciąg sum częściowych jest ściśle rosnący. Mamy więc

$\ln a_n = \left(\frac{1}{2(n-1)} - b_{n-1}\right) + \left(\frac{1}{2(n-2)} - b_{n-2}\right) + \cdots + \cdots + \left(\frac{1}{2} - b_1\right) + 1 =$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right] + 1 - [b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}]\,.$$

Szereg $\sum b_j$ jest zbieżny, ale szereg harmoniczny niestety nie. Mamy

$0 < \frac{1}{k-1} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx = \int_{k-1}^{k} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{x}\right] dx = \int_{k-1}^{k} \frac{x-(k-1)}{x(k-1)}\,dx <$

$$< \frac{1}{(k-1)^2} \int_{k-1}^{k} \left[x - (k-1)\right] dx = \frac{1}{2(k-1)^2}\,.$$

Przyjmijmy $c_{k-1} = \frac{1}{k-1} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$. Szereg $\sum c_n$ jest zbieżny i ma dodatnie wyrazy.

Z równości $\frac{1}{k} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx + c_{k-1}$ wynika, że

$\ln a_n = 1 + \frac{1}{2}\left[1 + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + c_1 + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + c_2 + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\,dx + c_{n-1}\right] - [b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}] =$
$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx + [c_1 + c_2 + \cdots + c_n] - [b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}] =$
$= \frac{3}{2} + \ln\sqrt{n} + [c_1 + c_2 + \cdots + c_n] - [b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}]$.

Wobec tego ciąg $(\ln a_n - \ln\sqrt{n})$ ma granicę skończoną. Z równości $e^{\ln a_n - \ln\sqrt{n}} = \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ i z poprzedniego zdania wynika, że ciąg $\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)$ ma granicę skończoną i dodatnią. Niech $\alpha_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n! \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n$ i niech $g = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Ponieważ granica podciągu równa jest granicy ciągu, więc $g = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{2n}$. Wnioskujemy stąd, że

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n} \cdot (n!)^2 \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot \frac{1}{(2n)!} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)!}\right\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n)}\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)} \cdot (2n+1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}\,.$$

Udowodniliśmy

Twierdzenie 11.10 (wzór Stirlinga)
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n! \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n = \sqrt{2\pi}$ zapisywany zwykle nieco mniej precyzyjnie

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \ \blacksquare$$

Zajmiemy się teraz całką $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Zwana jest ona całką Poissona. Znajdziemy jej wartość, oczywiście nie zajmując się funkcją pierwotną funkcji e^{-x^2}, bo jest ona nieelementarna. Mamy

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \ \overset{x=t\sqrt{n}}{\underset{dx=\sqrt{n}\,dt}{=\!=\!=}} \ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \ge$$
$$\ge \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \ \overset{t=\cos s}{\underset{dt=-\sin s\,ds}{=\!=\!=}} \ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_{\pi/2}^0 \sin^{2n} s(-\sin s)\,ds =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} s\,ds = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} =$$
$$\overset{Stirling}{\underset{dwa\ razy}{=\!=\!=}} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \frac{4^n \cdot 2\pi n \cdot n^{2n} \cdot e^{2n+1}}{e^{2n} \cdot \sqrt{2\pi(2n+1)} \cdot (2n+1)^{2n+1}} =$$
$$= \sqrt{2\pi} \lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \frac{n}{2n+1} \cdot e \cdot \left[\frac{2n}{2n+1}\right]^{2n}\right\} = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Analogicznie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \ \overset{x=t\sqrt{n}}{\underset{dx=\sqrt{n}\,dt}{=\!=\!=}} \ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \le$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \ \overset{t=\operatorname{tg} s}{\underset{dt=\cos^{-2} s\,ds}{=\!=\!=}} \ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2} s\,ds <$$
$$< \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} s\,ds \ \overset{s=\pi/2-\sigma}{\underset{ds=-d\sigma}{=\!=\!=}} \ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} s\,ds =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \xlongequal[dwa\ razy]{Stirling} \frac{\pi}{2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{2n}}{4^n\cdot e^{2n}\cdot(2\pi n)\cdot(n^n)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$

Lemat Riemanna–Lebesgue'a i jeszcze jedna caka

Teraz wykażemy bardzo ważny, choć w pewnym sensie zupełnie oczywisty

Lemat 11.11 (**Riemanna–Lebesgue'a**)

Jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna, to zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0\,.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że funkcja f jest klasy C^1. Mamy wtedy

$$\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{n}\cos(nx)f(x)\Big|_a^b + \int_a^b \frac{1}{n}\cos(nx)f'(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{n}\big(f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)\big) + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nx)f'(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

bo zachodzi nierówność $\left|\int_a^b \cos(nx)f'(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f'(x)|\,dx\,.$ W ten sposób wykazaliśmy prawdziwość lematu Riemanna dla funkcji, które mają ciągłą pochodną.

Teraz założymy, że f jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$, a $\varepsilon > 0$ — liczbą rzeczywistą. Na mocy twierdzenia o przybliżaniu funkcji całkowalnych gładkimi istnieje taka funkcja g klasy C^1 (a nawet wielomian), że $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\left|\int_a^b g(x)\sin(nx)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wobec tego dla dostatecznie dużych n mamy

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx\right| \le \left|\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\sin(nx)\,dx\right| + \left|\int_a^b g(x)\sin(nx)\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b \big|f(x)-g(x)\big|\big|\sin(nx)\big|\,dx + \left|\int_a^b g(x)\sin(nx)\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b \big|f(x)-g(x)\big|\,dx + \left|\int_a^b g(x)\sin(nx)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

W ten sposób wykazaliśmy lemat. ■

Uwaga 11.12 (**uogólnienie lematu Riemanna–Lebesgue'a**)

Dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, całkowalnej na przedziale $[a,b]$, zachodzą równości $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0$ oraz $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0$ — w tej uwadze λ jest parametrem rzeczywistym, a w lemacie Riemanna–Lebesgue'a n oznaczało liczbę naturalną. Dowód nie ulega żadnej zmianie. ■

Udowodnimy teraz, że

Twierdzenie 11.13
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Dowód. Wiemy już, że ta całka jest zbieżna. Funkcja $\frac{\sin x}{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ jest ciągła, a nawet nieskończenie wiele razy różniczkowalna na całej prostej. Mamy
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,dx \overset{x=(2n+1)u}{\underset{dx=(2n+1)du}{=\!=\!=\!=}} \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)u}{u}\,du\,.$$
Mamy również
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)u}{\sin u}\,du = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)u-\sin(2n-1)u}{\sin u}\,du =$$
$$= \int_0^{\pi/2}\frac{2\sin u\cos(2nu)}{\sin u}\,du = \frac{1}{2n}(\sin(n\pi)-\sin 0) = 0\,.$$
Wynika stąd, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2\cdot 0+1)u}{\sin u}\,du = \frac{\pi}{2}\,.$$
Funkcja $\frac{1}{u} - \frac{1}{\sin u} = \frac{\sin u - u}{u\sin u}$ jest ciągła, a nawet analityczna, w każdym punkcie przedziału $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Stąd i z lematu Riemanna–Lebesgue'a wynika, że
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{\sin u}\right)\sin(2n+1)u\,du = 0\,,$$
zatem
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)u}{u}\,du = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du +$$
$$+\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{\sin u}\right)\sin(2n+1)u\,du = \frac{\pi}{2}+0 = \frac{\pi}{2}\,. \blacksquare$$