# Granice funkcji, definicja ciągłości

Jednym z najważniejszych pojęć w matematyce jest pojęcie funkcji. Przypomnimy definicję.

**Definicja 6.1 (funkcji, wartości, obrazu, dziedziny i przeciwdziedziny)**
Przyporządkowanie $f$ elementom zbioru $A$ elementów zbioru $B$ w taki sposób, że każdemu elementowi zbioru $A$ przypisany jest dokładnie jeden element zbioru $B$ nazywamy funkcją ze zbioru $A$ w zbiór $B$. Jeśli $a$ jest elementem zbioru $A$, czyli argumentem funkcji $f$, to przypisany mu element zbioru $B$ oznaczamy symbolem $f(a)$ i nazywamy wartością funkcji $f$ w punkcie $a$ lub obrazem punktu $a$*. Zbiór $A$ nazywamy dziedziną funkcji $f$, zbiór $B$ – przeciwdziedziną, zbiór $f(A)$ złożony ze wszystkich wartości funkcji $f$, czyli elementów zbioru $B$ postaci $f(a)$, gdzie $a \in A$ nazywamy obrazem zbioru A (przez funkcję $f$) lub zbiorem wartości funkcji $f$. Jeśli $f$ przekształca zbiór $A$ w zbiór $B$, to piszemy $f\colon A \to B$. Jeśli zbiór $f(A)$ wartości funkcji $f$ pokrywa się z przeciwdziedziną $B$ funkcji $f$, to mówimy, że $f$ przekształca zbiór $A$ *na* zbiór $B$ i piszemy czasem $f\colon A \xrightarrow{na} B$. ■

Przykładem funkcji jest ciąg: jest to funkcja określona np. na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$.
Inną dobrze znaną funkcją jest liniowa: $f(x) = ax + b$, gdzie $a,\ b$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $x$ jest elementem zbioru wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, na którym funkcja $f$ jest określona, $f(x)$ jest elementem przeciwdziedziny $\mathbb{R}$; jeśli $a \neq 0$, to funkcja $f$ przekształca zbiór $\mathbb{R}$ *na* siebie; jeśli $a = 0$, to jedyną wartością funkcji $f$ jest liczba $b$.

Jeszcze inny przykład to funkcja kwadratowa: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a$, $b$, $c$ są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$, funkcja ta jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, przeciwdziedziną jest również $\mathbb{R}$, zbiorem wartości jest półprosta $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$ w przypadku $a > 0$, zaś w przypadku $a < 0$ zbiorem wartości jest półprosta $\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.

Przykłady można mnożyć, ale nie będziemy tego robić teraz. Na razie będziemy zajmować się funkcjami rzeczywistymi jednej zmiennej rzeczywistej, co oznacza, że wartościami funkcji będą liczby rzeczywiste i dziedziną funkcji będzie jakiś zbiór złożony z liczb rzeczywistych. Czasem zamiast liczb rzeczywistych występować będą liczby zespolone. W praktyce dziedzinami funkcji, które będziemy badać, będą albo

* Czasem będziemy mówić: „$f$–obrazem”, choć to nie brzmi dobrze, ale czasem należy wyraźnie zaznaczyć o jaką funkcję chodzi.

przedziały, albo sumy skończenie wielu lub nieskończenie wielu przedziałów, np dziedziną funkcji tg jest zbiór złożony z tych wszystkich liczb rzeczywistych, które nie są postaci $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, czyli jest to suma przedziałów postaci $\big(-(2n+1)\frac{\pi}{2},(2n+1)\frac{\pi}{2}\big)$, gdzie $n$ oznacza dowolną liczbę całkowitą. w przypadku funkcji zdefiniowanej wzorem $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$ można powiedzieć, że jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem $-2$ i $1$, czyli zbiór $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$.

Z punktu widzenia formalnego dopóki nie powiemy na jakim zbiorze funkcja ma być zdefiniowana, to nie została ona określona. W szczególności z formalnego punktu widzenia zadania: znaleźć dziedzinę funkcji określonej wzorem ..., nie mają sensu. Pytanie o dziedzinę należy traktować jako pytanie o maksymalny zbiór, na którym można zdefiniować funkcję w sposób zaproponowany przez autora zadania. Nawet przy takiej interpretacji mogą powstawać wątpliwości: np. czy funkcja określona wzorem $f(x)=\frac{x^2}{x}$ może tym wzorem być zdefiniowana na całej prostej, czy też w punkcie $0$ tym akurat wzorem nie da się jej zdefiniować. Autorowi tego tekstu wydaje się, że specjaliści od tak formułowanych zadań w większości przypadków uznają, że ta definicja w punkcie $0$ nie działa, ale nie wydaje mu się, by ten problem wart był dyskusji – można po prostu takich zadań nie dawać, a jeśli się je daje, to unikać wieloznaczności. Będziemy jednak mówić np. o funkcji $\frac{4x^2-13x-167}{x^3-4x+3}$, zakładając przy tym, że jej dziedziną jest zbiór wszystkich tych liczb rzeczywistych, dla których mianownik jest różny od $0$. Funkcja $\sqrt{1-e^x}$ będzie automatycznie zdefiniowana na zbiorze złożonym z liczb rzeczywistych niedodatnich. W przypadku jakichkolwiek wieloznaczności będziemy wyraźnie określać dziedzinę. Czasem też dziedzina z jakichś przyczyn będzie mniejsza niż maksymalna, np. zmienna będzie mieć jakieś pozamatematyczne znaczenie i wtedy interpretacja będzie źródłem ograniczeń dziedziny. Np. pytanie o maksymalne pole prostokąta o obwodzie $4$ prowadzi do rozpatrywania funkcji $x(2-x)$ na przedziale otwartym $(0,2)$: liczba $x$ oznacza tu jeden wymiar prostokąta, a $2-x$ — drugi. Funkcję $x(2-x)$ można rozpatrywać nie tylko na przedziale $(0,2)$, ale z punktu widzenia zadanego pytania nie ma to sensu.

W dalszej części zajmiemy się również funkcjami określonymi na podzbiorach płaszczyzny (czyli zbioru wszystkich liczb zespolonych $\mathbb{C}$), przestrzeni trójwymiarowej i ogólnie $n$–wymiarowej. Wartościami tych funkcji będą zazwyczaj liczby rzeczywiste, ale wystąpią również funkcje przekształcające pewne podzbiory płaszczyzny w płaszczyznę. Takie funkcje będą nazywane na ogół przekształceniami lub odwzorowaniami. Nie oznacza to, że funkcji z $\mathbb{R}$ *na* $\mathbb{R}$ danej wzorem $f(x)=x+1$ nie można nazwać odwzorowaniem – często termin ten jest używany, zwłaszcza wtedy, gdy mówimy o geometrii związanej z tą funkcją – jest przesunięcie o $1$ w prawo.

Ważną klasą funkcji są funkcje różnowartościowe, tj. takie które różnym punktom dziedziny przypisują różne wartości: $(x \neq y) \Rightarrow \big(f(x) \neq f(y)\big)$. Jeśli $f$ jest funkcją różnowartościową przekształcającą zbiór $A$ *na* zbiór $B$, to można określić funkcję $f^{-1}$ odwrotną do danej funkcji $f$: $f^{-1}(b) = a \iff b = f(a)$. Jeśli $f(x) = x^3$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$, to funkcja $f$ przekształca różnowartościowo zbiór $\mathbb{R}$ *na* siebie, więc można określić funkcję odwrotną: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Jeśli $f(x) = e^x$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$, to zbiorem wartości funkcji $f$ jest zbiór wszystkich liczb dodatnich i wobec tego $f^{-1}(x) = \ln x$ dla każdej dodatniej liczby $x$. Jeśli $f(x) = x^2$ dla liczb $x \geq 0$, to $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ dla każdej liczby $x \geq 0$. Jeśli $f(x) = x^2$ dla każdej liczby $x \leq 0$, to funkcja $f$ przekształca zbiór wszystkich liczb niedodatnich *na* zbiór wszystkich liczb nieujemnych. Funkcja odwrotna do niej dana jest wzorem $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$. W ostatnich dwóch przykładach wzór definiujący był identyczny, ale dziedziny były różne. W związku z tym wzory na funkcję odwrotne też były różne.

W dalszym ciągu będziemy używać jeszcze dwu funkcji zdefiniowanych jako odwrotne do funkcji sinus i tangens. Oczywiście funkcje sinus i tangens jako okresowe nie są różnowartościowe, więc nie mają funkcji odwrotnych. Można więc postąpić tak, jak w przypadku pierwiastka kwadratowego, który jest zdefiniowany jako funkcja odwrotna do funkcji $x^2$ rozpatrywanej nie na całej dziedzinie, lecz na zbiorze, na którym funkcja $x^2$ jest różnowartościowa, i to możliwie najprostszym o tej własności.* Wybieramy możliwe najbardziej naturalne dziedziny. W przypadku sinusa ograniczamy się do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a w przypadku tangensa – do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Zbiory wartości to odpowiednio przedział domknięty $[-1, 1]$ i cała prosta $(-\infty, +\infty)$. Tradycyjnie zamiast pisać $\sin^{-1}$ piszemy $\arcsin$, a zamiast $\mathrm{tg}^{-1}$ piszemy $\mathrm{arctg}$**, co zresztą pozwala na uniknięcie dwuznaczności związanej z oznaczeniami $\sin^{-1}$ i $\mathrm{tg}^{-1}$. Podamy teraz definicje tych funkcji w jawny sposób.

**Definicja 6.2 (funkcji arcsin i arctg)**

Jeśli $x \in [-1, 1]$, to $\arcsin x$ jest jedyną liczbą z przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dla której zachodzi równość $\sin(\arcsin x) = x$.

Jeśli $x$ jest liczbą rzeczywistą, to $\mathrm{arctg}\, x$ jest jedyną liczbą rzeczywistą z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, dla której zachodzi równość $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x$. ■

Podamy przykłady

* Zbiorów, na których funkcja $x^2$ jest różnowartościowa, jest bardzo dużo, np, $[-1,0] \cup (1,+\infty)$, $(-\infty,-2)$, $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$, zbiór złożony ze wszystkich liczb wymiernych dodatnich oraz ujemnych liczb niewymiernych i wiele innych.

** W niektórych krajach $\arctan$.

**Przykład 6.1** $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 0 = 0$. ■

Wprowadzimy oznaczenie: $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb rzeczywistych uzupełniony symbolami nieskończonymi $-\infty$ i $+\infty$. Można myśleć, że $\overline{\mathbb{R}}$ to prosta z końcami. Podkreślić wypada, że symboli nieskończonych nie traktujemy jak liczb, bo np. nie wszystkie działania z ich użyciem są wykonalne.

**Definicja 6.3 (punktu skupienia)**

Punkt $p \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(a_n)$ punktów zbioru $A$, o wyrazach różnych od $p$, zbieżny do $p$. Punkt $a \in A$, który nie jest jego punktem skupienia nazywamy punktem izolowanym zbioru $A$. ■

**Przykład 6.2** $+\infty$ jest punktem skupienia zbioru wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$ — by się o tym przekonać wystarczy przyjąć $a_n = n$. Innych punktów skupienia zbiór $\mathbb{N}$ nie ma. W grę mogłyby wchodzić jedynie liczby nieujemne, bo granica ciągu liczb naturalnych jest albo równa $+\infty$, albo też jest liczbą nieujemną. Jeśli ciąg liczb naturalnych ma skończoną granicę, to — ze względu na warunek Cauchy'ego — odległości między wyrazami tego ciągu, których numery są dostatecznie duże, są mniejsze niż $1$, a ponieważ są to liczby całkowite, więc te odległości są równe $0$. Wykazaliśmy, że ciąg liczb naturalnych, który ma skończoną granicę musi być od pewnego miejsca stały, a więc granica jest równa pewnym wyrazom ciągu. Jest niezgodne z definicją punktu skupienia. ■

**Przykład 6.3** Każda liczba z przedziału domkniętego $[0,1]$ jest punktem skupienia przedziału otwartego $(0,1)$. Innych punktów skupienia przedział $(0,1)$ nie ma. To drugie zdanie jest prawdziwe w oczywisty sposób – granica ciągu liczb z przedziału $(0,1)$ musi się znajdować w przedziale $[0,1]$. Jest też jasne, że dla każdej liczby $p$ z przedziału $[0,1]$ istnieje ciąg $(a_n)$ liczb z przedziału $(0,1)$, taki że $p = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oraz $a_n \neq p$ dla każdego $n$. ■

**Przykład 6.4** Każda liczba rzeczywista i oba symbole nieskończone są punktami skupienia dziedziny funkcji tangens, tj. zbioru tych liczb rzeczywistych, które nie są nieparzystymi wielokrotnościami liczby $\frac{\pi}{2}$. Łatwe uzasadnienie tego stwierdzenia pozostawiamy czytelnikom. ■

**Przykład 6.5** Niech $C \subseteq [0,1]$ będzie zbiorem złożonym ze wszystkich tych liczb, które można zapisać w układzie trójkowym za pomocą cyfr $0$ i $2$.* Łatwo można zauważyć, że $\mathbb{R}\setminus C$ jest sumą następującym przedziałów otwartych: $(-\infty,0)$, $(1,\infty)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$, ... Jasne jest, że zbiór $C$ nie zawiera żadnego przedziału. Każdy punkt zbioru Cantora jest jego punktem skupienia. By się o tym przekonać, wystarczy w rozwinięciu trójkowym liczby $x\in C$ zmienić $n$–tą cyfrą: zamiast cyfry $c_n$ otrzymamy cyfrę $2-c_n$. Otrzymaną liczbę oznaczamy przez $x_n$. Oczywiście $|x-x_n| = 2\cdot 3^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Można łatwo zauważyć, że zapis trójkowy liczby $x\in C$ bez użycia cyfry $1$ jest jednoznaczny. Niech $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\cdot 3^{-n}$, $c_n\in\{0,2\}$ dla $n=1,2,\ldots$ Definiujemy funkcję $f$ za pomocą wzoru $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2}\cdot 2^{-n}$. Wykazać, że funkcja $f$ przekształca zbiór Cantora na cały przedział $[0,1]$. Sprawdzić, czy $f$ jest funkcją różnowartościową. Oczywiście funkcja $f$ jest niemalejąca. Czy można ją dookreślić w punktach $[0,1]\setminus C$ tak, by stała się niemalejąca na przedziale $[0,1]$? ■

Teraz zdefiniujemy granicę funkcji.

**Definicja 6.4 ( granicy funkcji w punkcie.)** *

Niech $p$ oznacza dowolny punkt skupienia dziedziny funkcji $f$. Mówimy, że $g\in\overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji $f$ w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n)$ zbieżnego do $p$, którego wszystkie wyrazy są różne od $p$, ma miejsce równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Granicę funkcji $f$ w punkcie $p$ oznaczamy symbolem $\lim\limits_{x\to p} f(x)$. ■

Należy wrócić uwagę na to, że wśród wyrazów ciągu zbieżnego do $p$, występującego w definicji granicy, nie ma $p$. Oznacza to w szczególności, że nawet wtedy, gdy $p$ jest argumentem funkcji $f$, to wartość w tym punkcie nie ma wpływu na istnienie granicy w punkcie $p$, ani na jej wartość — można dowolnie zmieniać wartość funkcji w punkcie $p$ nie zmieniając granicy w tym punkcie. Jeśli funkcja ma granicę w punkcie $p$, to w dostatecznie bliskich punktach $x$ wartość $f(x)$ jest bliska granicy $g$, pod warunkiem jednak, że $x\neq p$. Ponieważ ciąg ma co najwyżej jedną granicę, więc również funkcja może mieć tylko jedną granicę w jednym punkcie. Pojęcie granicy funkcji jest — jak się przekonamy — bardzo ważne. Jest rozszerzeniem pojęcia granicy ciągu. Podamy teraz kilka przykładów.

**Przykład 6.6** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Równość ta została udowodniona wcześniej. ■

---

* tzw. zbiór Cantora

* Ta definicja jest nazywana ciągową lub definicją Heinego

**Przykład 6.7** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ . Również ta równość została udowodniona wcześniej. ■

**Przykład 6.8** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Tę równość wykazaliśmy poprzednio. ■

**Przykład 6.9** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ . Tę równość wykażemy teraz. Trzeba wykazać, że dla każdego ciągu $(x_n)$, którego granicą jest $\infty$ zachodzi: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$. Wiemy, że jest tak w przypadku $x_n=n$ — z definicji liczby $e$. Przypomnijmy też, że ciąg $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ jest rosnący. Stąd wynika, że jeśli $k>n$ jest liczbą naturalną, to $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e$. Stąd i z definicji granicy wynika, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=+\infty$ , to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e$ — jeśli bowiem $m$ jest jakąkolwiek liczbą naturalną, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych $n$, zachodzi nierówność $k_n>m$ , zatem $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}<e$. Teraz możemy przejść do właściwego dowodu.

Niech $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że dla każdego $n$ zachodzi nierówność $x_n\geq 1$, bo jest tak dla dostatecznie dużych $n$. Niech $k_n=\lfloor x_n\rfloor$ będzie taką liczbą całkowitą, tzn. $k_n\leq x_n<k_n+1$. Ponieważ $x_n-1<k_n$ , więc $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=+\infty$. Stąd i z tego, co wykazaliśmy poprzednio, wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+k_n}\right)^{k_n}=e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{1+k_n}$. Mamy również

$$\left(1+\frac{1}{1+k_n}\right)^{k_n}\leq\left(1+\frac{1}{1+k_n}\right)^{x_n}<\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\leq\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{x_n}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{1+k_n}.$$

Z tej nierówności i twierdzenia o trzech ciągach wynika dowodzona przez nas teza. ■

**Przykład 6.10** Funkcja $\frac{1}{x}$, określona dla $x\neq 0$, nie ma granicy w punkcie $0$, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1/n}=+\infty$ i jednocześnie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-1/n}=-\infty$, udało się nam więc wskazać dwa ciągi argumentów zbieżne do $0$, takie że odpowiadające im ciągi wartości mają różne granice. ■

**Przykład 6.11** Funkcja $\sin\frac{1}{x}$, określona dla $x\neq 0$, nie ma granicy w punkcie $0$, bowiem $\sin\frac{1}{1/(2n\pi)}=0$ oraz $\sin\frac{1}{1/(2n\pi+\pi/2)}=1$. Wskazaliśmy więc takie dwa ciągi argumentów zbieżne do $0$, że odpowiadające im ciągi wartości są zbieżne do różnych granic (są stałe i różne). ■

Oprócz granicy funkcji rozpatrywane są granice jednostronne funkcji w punkcie. Zdefiniujemy granicę lewostronną, definicja granicy prawostronnej jest analogiczna.

**Definicja 6.5 (granicy lewostronnej)**
$g$ jest granicą lewostronna funkcji $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$p$ jest punktem skupienia zbioru $X \cap (-\infty, p)$ czyli, gdy można znaleźć w dziedzinie ciąg $(x_n)$ o wyrazach mniejszych (ściśle!) niż $p$, zbieżny do $p$ i gdy dla każdego takiego ciągu odpowiadający mu ciąg wartości $\big(f(x_n)\big)$ ma granicę $g$. Stosujemy oznaczenie $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$. ■

Łatwo można udowodnić, że funkcja $\frac{1}{x}$ ma jednostronne granice w punkcie $0$: prawostronna jest równa $+\infty$, zaś lewostronną jest $-\infty$. Funkcja $\sin\frac{1}{x}$ nie ma granicy prawostronnej w punkcie $0$ — wykazaliśmy to wskazując dwa ciągi *dodatnich* argumentów tej funkcji zbieżne do $0$, takie że odpowiadające im ciągi wartości mają różne granice.

Bez trudu można udowodnić „funkcyjną" wersję twierdzenia o scalaniu.

**Twierdzenie 6.6 ( o scalaniu)**
Funkcja $f$ określona na zbiorze $X = X_1 \cup X_2$, którego punktem skupienia jest punkt $p$, który jest jednocześnie punktem skupienia obu zbiorów $X_1, X_2$ ma granicę w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje $f_1 := f_{|X_1}$ i $f_2 := f_{|X_2}$ mają granice i te granice są równe.

**Dowód.** Jest jasne, że z istnienia granicy $\lim\limits_{x \to p}$ wynika istnienie i równość obu granic $\lim\limits_{x \to p} f_1$ i $\lim\limits_{x \to p} f_2$ zamiast wszystkich ciągów zbieżnych do $p$, których wyrazy są różne od $p$, rozpatrujemy jedynie ich część. Jeśli natomiast wiemy, że istnieją granice funkcji $f_1$ i $f_2$, to ciąg o wyrazach różnych od $p$ możemy rozbić na podciągi o wyrazach należących do $X_1$ i na podciąg złożony z pozostałych wyrazów, więc należących do $X_2$. Odpowiadające im ciągi wartości mają tę samą granicę, więc ciąg wartości odpowiadający naszemu ciągowi ma granicę i to równą wspólnej wartości obu granic. Oczywiście jeśli tylko skończenie wiele wyrazów ciągu argumentów znajduje się w zbiorze $X_1$, to nie możemy rozpatrujemy granicy $\lim\limits_{x \to p} f_1$, ale to niczemu nie przeszkadza. ■

Podobnie jak w przypadku twierdzenia o scalaniu, można przenieść inne twierdzenia dotyczące granic ciągów na ogólniejszy przypadek granicy funkcji.

**Twierdzenie 6.7 ( o arytmetycznych własnościach granicy)**

**A1.** Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x \to p} f(x)$, $\lim\limits_{x \to p} g(x)$ i określona jest ich suma, to istnieje granica $\lim\limits_{x \to p} (f(x) + g(x))$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{x \to p} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to p} f(x) + \lim\limits_{x \to p} g(x)$.

**A2.** Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x \to p} f(x)$, $\lim\limits_{x \to p} g(x)$ i określona jest ich różnica, to istnieje granica $\lim\limits_{x \to p} (f(x) - g(x))$ i: $\lim\limits_{x \to p} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to p} f(x) - \lim\limits_{x \to p} g(x)$.

**A3.** Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określony jest ich iloczyn, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{x\to p} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to p} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to p} g(x)$.

**A4.** Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określony jest ich iloraz, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi wzór $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)}$.

**Dowód.** Twierdzenie jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu. ■

Przed podaniem następnego twierdzenia przypomnijmy, że operujemy terminem *dla dostatecznie dużych* $n$. Oznacza to, że interesują nas liczby naturalne większe od pewnej liczby. Właściwie chodzi o to, by były one bliskie $+\infty$. W przypadku funkcji argument, którym w przypadku ciągu jest numer wyrazu, czyli $n$, ma być bliski punktowi $p$, który może — lecz nie musi — być równy $+\infty$. Wymaga więc zmiany sposób mówienia. Mówiąc $x$ *jest dostatecznie bliski* $p$ będziemy mieć na myśli, że:

$(+\infty)$ $x > M$ dla pewnej liczby rzeczywistej $M$, gdy $p = +\infty$ ,

$(-\infty)$ $x < M$ dla pewnej liczby rzeczywistej $M$, gdy $p = -\infty$,

$(\mathbb{R})$ $|x-p| < \delta$ dla pewnej **dodatniej** liczby $\delta$, gdy $p \in \mathbb{R}$.

**Twierdzenie 6.8 (o szacowaniu)**

**N1.** Jeśli $C < \lim\limits_{x\to p} f(x)$, to dla $x \neq p$, dostatecznie bliskich $p$ zachodzi nierówność $C < f(x)$.

**N2.** Jeśli $C > \lim\limits_{x\to p} f(x)$, to dla $x \neq p$, dostatecznie bliskich $p$ zachodzi nierówność $C > f(x)$.

**N3.** Jeśli $\lim\limits_{x\to p} g(x) < \lim\limits_{x\to p} f(x)$, to dla $x \neq p$, dostatecznie bliskich $p$ zachodzi nierówność $g(x) < f(x)$.

**N4.** Jeśli $g(x) \leq f(x)$ dla $x$ dostatecznie bliskich $p$, to zachodzi nierówność $\lim\limits_{x\to p} g(x) \leq \lim\limits_{x\to p} f(x)$.

**Dowód.** Zakładamy cały czas, że $p$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji. Zauważmy najpierw, że zaprzeczeniem zdania: *Dla wszystkich* $x \neq p$ *dostatecznie bliskich* $p$ *spełniony jest warunek* $W$ jest zdanie: *Istnieje ciąg* $(x_n)$ *zbieżny do* $p$, *taki że* $x_n \neq p$ *dla każdego* $n$ *i warunek* $W$ *nie zachodzi dla żadnego wyrazu ciągu* $(x_n)$. Jeśli np. $p = +\infty$ i nie jest prawdą, że warunek $W$ spełniony jest dla wszystkich $x$ dostatecznie bliskich $p = +\infty$, to dla każdej liczby rzeczywistej $M$ istnieje liczba $x > M$, dla której warunek $W$ nie zachodzi. By otrzymać ciąg $(x_n)$, którego granicą jest $\infty$, złożony z liczb, dla których warunek W nie zachodzi, wystarczy przyjąć, że $M = n$. Jeśli natomiast istnieje ciąg $(x_n)$, którego granicą jest $+\infty$, taki że

warunek $W$ nie jest spełniony dla żadnego $(x_n)$, to warunek $W$ nie jest spełniony dla wszystkich dostatecznie dużych $x$, czyli nie jest spełniony dla wszystkich $x$ dostatecznie bliskich $+\infty$. Analogicznie postępujemy w przypadku $p = -\infty$.
Jeśli $p \in \mathbb{R}$, to dla każdego $\delta > 0$ istnieje $x$, takie że $x \neq p$ i $|x - p| < \delta$, dla którego warunek $W$ nie zachodzi. By zdefiniować $x_n$ przyjmujemy, że $\delta = \frac{1}{n}$. Z istnienia ciągu $(x_n)$ złożonego z liczb, dla których warunek W nie zachodzi, wynika od razu, że nie jest możliwe, by warunek $W$ był spełniony dla wszystkich $x$ dostatecznie bliskich $p$.

Teraz możemy zająć się właściwym dowodem. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to p} f(x) < C$ oraz że nie jest prawdą, że dla $x$ dostatecznie bliskich $p$ zachodzi nierówność $f(x) < C$. Wynika stąd, że istnieje ciąg $(x_n)$, taki że dla każdego $n$ zachodzi nierówność $f(x_n) \geq C$. Stąd jednak wynika, że $\lim\limits_{x\to p} f(x_n) \geq C$, wbrew założeniu. Dowód w tym przypadku został zakończony. Stwierdzenie N2 dowodzimy analogicznie lub wnioskujemy z N1 zastępując funkcję $f$ funkcją przeciwną $-f$. Stwierdzenie N3 wynika ze stwierdzeń poprzednich: starczy użyć liczby $C$ leżącej między $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to p} g(x)$. Ostatni fragment twierdzenia to prosta konsekwencja tego, że ciąg o mniejszych wyrazach ma mniejszą granicę. Dowód został zakończony. ■

Podamy teraz inną definicję granicy funkcji. Z poprzednią można wiązać takie stwierdzenie (nieścisłe, ale ważne): *niezależnie od tego w jaki sposób argument dąży do $p$, to wartość funkcji zbliża się do $g$*. Z tą która pojawi się niebawem wiążemy stwierdzenie *jeśli argument funkcji jest dostatecznie bliski $p$, ale różny od $p$, to wartość funkcji jest bliska $g$*. Sformułujemy zapowiedzianą definicję bardzo dokładnie, bez żadnych skrótów. Ma ona dziewięć części, ale na ogół po przeczytaniu dwóch – trzech pierwszych nie ma potrzeby czytać dalej, bo można to samodzielnie napisać.

**Definicja 6.9 (granicy funkcji)** *

**1.** $g, p \in \mathbb{R}$. Wtedy $g = \lim\limits_{x\to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\ \big(0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon\big).$$

**2.** $g \in \mathbb{R}$, $p = +\infty$. Wtedy $g = \lim\limits_{x\to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{M}\forall_{x\in X}\ \big(x > M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon\big).$$

**3.** $g \in \mathbb{R}$, $p = -\infty$. Wtedy $g = \lim\limits_{x\to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{M}\forall_{x\in X}\ \big(x < M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon\big).$$

* ta definicja nazywana jest definicją Cauchy'ego lub definicją otoczeniową, czasem, to już bełkot matematyczny, – epsilonowo–deltową.

**4.** $g=+\infty$, $p\in\mathbb{R}$. Wtedy $g=\lim\limits_{x\to p}f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_M\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\ \big(0<|x-p|<\delta\Rightarrow f(x)>M\big)\,.$$

**5.** $g=+\infty$, $p=+\infty$. Wtedy $g=\lim\limits_{x\to p}f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_M\exists_K\forall_{x\in X}\ \big(x>K\Rightarrow f(x)>M\big)\,.$$

**6.** $g=+\infty$, $p=-\infty$. Wtedy $g=\lim\limits_{x\to p}f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_M\exists_K\forall_{x\in X}\ \big(x<K\Rightarrow f(x)>M\big)\,.$$

**7.** $g=-\infty$, $p\in\mathbb{R}$. Wtedy $g=\lim\limits_{x\to p}f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_M\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\ \big(0<|x-p|<\delta\Rightarrow f(x)<M\big)\,.$$

**8.** $g=-\infty$, $p=+\infty$. Wtedy $g=\lim\limits_{x\to p}f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_M\exists_K\forall_{x\in X}\ \big(x>K\Rightarrow f(x)<M\big)\,.$$

**9.** $g=-\infty$, $p=-\infty$. Wtedy $g=\lim\limits_{x\to p}f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_M\exists_K\forall_{x\in X}\ \big(x<K\Rightarrow f(x)<M\big)\,.$$

**Dowód.** Dowód podamy w dwóch wybranych przypadkach: pierwszym i ósmym. Resztę czytelnik powinien uzupełnić samodzielnie, być może nie wszystko — tyle tylko, by w miarę swobodnie przeprowadzić dowód w którymś przypadku.

Założymy najpierw, że $g$, $p$ są liczbami rzeczywistymi oraz że $g=\lim\limits_{x\to p}f(x)$ w sensie definicji ciągowej. Jeśli istnieje taka liczba $\varepsilon>0$, że dla każdej liczby $\delta>0$ istnieje $x$, takie że $0<|x-p|<\delta$ i jednocześnie $|f(x)-g|\geq\varepsilon$, to przyjmując, że $x_n$ jest dobrane do $\frac{1}{n}$, tzn. $0<|x_n-p|<\frac{1}{n}$ i $|f(x_n)-g|\geq\varepsilon$, otrzymujemy ciąg $(x_n)$ zbieżny do $p$, o wyrazach różnych od $p$ i taki że odpowiadający mu ciąg wartości funkcji nie jest zbieżny do liczby $g$, bowiem wszystkie wyrazy tego ciągu wartości pozostają w odległości nie mniejszej niż $\varepsilon$ od $g$. Twierdzenie zostało udowodnione w jedna stronę.

Teraz założymy, że $g=\lim\limits_{x\to p}f(x)$ w sensie definicji otoczeniowej. Niech $(x_n)$ będzie dowolnym ciągiem argumentów funkcji $f$ zbieżnym do $p$, o wyrazach różnych od $p$ i niech $\varepsilon$ oznacza dowolną liczbę dodatnią. Z definicji otoczeniowej granicy funkcji wynika, że istnieje taka liczba $\delta>0$, że jeśli $0<|x-p|<\delta$, to $|f(x)-g|<\varepsilon$. Z definicji granicy ciągu wnioskujemy, że dla dostatecznie dużych $n$ zachodzi nierówność $|x_n-p|<\delta$ i oczywiście $x_n\neq p$, zatem $0<|x_n-p|<\delta$, a stąd wynika, że $|f(x_n)-g|<\varepsilon$. Stąd i z definicji granicy ciągu wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=g$, a wobec tego, że $(x_n)$ jest dowolnym ciągiem, możemy stwierdzić, że $g$ jest granicą w sensie definicji ciągowej.

Teraz, zgodnie z obietnicą, zajmiemy się przypadkiem ósmym, tj. założymy, że

$g = -\infty$ oraz że $p = +\infty$. Zakładamy, że dla każdego ciągu $(x_n)$ argumentów funkcji $f$, którego granicą jest $+\infty$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$. Mamy wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej $M$ istnieje liczba rzeczywista $K$, taka że jeśli $x > K$, to $f(x) < M$. Załóżmy, że tak nie jest. Istnieje więc liczba $M$ taka, że dla każdej liczby $K$ istnieje taki argument $x$ funkcji $f$, że $x > K$ i jednocześnie $f(x) \geq M$. Przyjmując $K = n$ otrzymujemy argument $x_n$, taki że $x_n > n$ i $f(x_n) \geq M$. Stąd jednak wynika, że $-\infty$ nie jest granicą ciągu $\big(f(x_n)\big)$, wbrew założeniu. Dowód w jedną stronę został zakończony.

Teraz założymy, że dla każdej liczby rzeczywistej $M$ istnieje taka liczba rzeczywista $K$, że jeśli $x > K$, to $f(x) < M$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, to dla dostatecznie dużych $n$ zachodzi nierówność $x_n > K$ i wobec tego $f(x_n) < M$. Wobec dowolności $M$, oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$. Dowód został zakończony. ■

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika analogiczne twierdzenie dla granic funkcji.

**Twierdzenie 6.10 (o trzech funkcjach)**
Jeśli dla wszystkich argumentów $x$ dostatecznie bliskich punktowi $p$ zachodzi nierówność podwójna $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ i istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} h(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p} h(x)$, to również funkcja $g$ ma granicę w punkcie $p$ i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p} g(x) = \lim\limits_{x\to p} h(x)$. ■

Z następnego twierdzenia w zasadzie nie będziemy korzystać, podajemy je tylko po to, by pokazać, pełną analogię pojęcia granicy ciągu i granicy funkcji, więc łatwy dowód pozostawiamy czytelnikom w charakterze zadania.

**Twierdzenie 6.11 (Cauchy'ego o istnieniu granicy skończonej)**
Funkcja $f$ ma granicę skończoną w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek Cauchy'ego:

dla każdego $\varepsilon > 0$, dla wszystkich $x, y \neq p$ dostatecznie bliskich $p$
zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (w.C.) ■

Twierdzenie, które znajduje się poniżej ma bardzo prosty dowód, ale jest bardzo często stosowane.

**Twierdzenie 6.12 (o granicy złożenia dwu funkcji)**
Załóżmy, że dziedzina funkcji $f$ zawiera zbiór wartości funkcji $g$, że funkcja $g$ ma granicę $G$ w punkcie $p$, że granica $G$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji $f$ i funkcja $f$ ma granicę $H$ w punkcie $G$ oraz że wartości funkcji $g$ w punktach dostatecznie bliskich $p$ są różne od $G$. Przy tych założeniach funkcja $f \circ g$ określona

wzorem $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ma w punkcie $p$ granicę, ta granica jest równa $H$.

**Dowód.** Założenia tego twierdzenia są tak dobrane, że dowód wynika od razu z definicji ciągowej granicy funkcji w punkcie. ■

**Definicja 6.13 (kresów funkcji)**

**1.** Kresem górnym $M$ funkcji $f$ nazywamy kres górny zbioru jej wartości, tj. najmniejszą liczbę $M$ (lub $+\infty$, jeśli funkcja nie jest ograniczona z góry) taką, że $f(x) \le M$ dla każdego argumentu $x$ funkcji $f$. Kres górny funkcji $f$ oznaczamy symbolem $\sup f$.

**2.** Kresem dolnym $M$ funkcji $f$ nazywamy kres dolny zbioru jej wartości, tj. największą liczbę $M$ (lub $-\infty$, jeśli funkcja nie jest ograniczona z dołu) taką, że $f(x) \ge M$ dla każdego argumentu $x$ funkcji $f$. Kres dolny funkcji $f$ oznaczamy symbolem $\inf f$.

**Definicja 6.14 (granicy górnej)**

$M \in [-\infty, +\infty]$ jest granicą górną funkcji $f$ przy $x \longrightarrow p$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są oba warunki

(i) dla każdego ciągu $(x_n)$ o granicy $p$, wyrazach *różnych* od $p$, dla którego istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ zachodzi nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \le M$ oraz

(ii) $M$ jest najmniejszym elementem $[-\infty, +\infty]$, dla którego spełniony jest warunek (i).

Piszemy wtedy $M = \limsup\limits_{x\to p} f(x)$. ■

Analogicznie definiujemy granicę dolną funkcji, którą oznaczamy za pomocą symbolu $M = \liminf\limits_{x\to p} f(x)$. Warunek (ii) tej definicji można zastąpić stwierdzeniem: istnieje ciąg $(x_n)$ o granicy $p$ i wyrazach różnych od $p$, dla którego $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Oznacza to, że granica górna jest kresem górnym granic postaci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, gdzie $(x_n)$ oznacza ciąg o wyrazach różnych od $p$, którego granicą jest $p$. Definicja granicy dolnej jest analogiczna. Można bez trudu wykazać, że jeśli $p$ jest liczbą rzeczywistą, $D$ dziedziną funkcji $f$, to

$$\left[\liminf_{x\to p} f(x), \limsup_{x\to p} f(x)\right] =$$
$$= \bigcap_{\delta>0}\Big[\inf f\big(D\cap(p-\delta,p+\delta)\setminus\{p\}\big),\, \sup f\big(D\cap(p-\delta,p+\delta)\setminus\{p\}\big)\Big].$$

Oznacza to, że rozpatrujemy otoczenie punktu $p$, znajdujemy najmniejszy przedział domknięty (być może nieskończony) zawierający obraz tej części dziedziny, która znalazła się w rozpatrywanym otoczeniu punktu $p$, z wyjątkiem punktu samego $p$. Następnie zmniejszamy to otoczenie (czyli mówiąc nieformalnie $\delta \to 0$), lewy koniec otrzymanego przedziału, być może zdegenerowanego do jednego punktu, to $\liminf\limits_{x\to p} f(x)$, a prawy — to $\limsup\limits_{x\to p} f(x)$. Zachęcam studentów do wykazania równoważności tych określeń oraz do samodzielnego ich sformułowania w przypadku $p = \pm\infty$.

Podamy teraz kilka przykładów kresów funkcji.

**Przykład 6.12** Niech $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Jest jasne, że $-1 < f(x) < 1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$. Czytelnik sprawdzi z łatwością, że jeśli $0 \le a < 1$ i $x > \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, to $a < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$. Wykazaliśmy więc, że $1$ jest ograniczeniem górnym funkcji $f$ oraz że żadna liczba $a$ mniejsza niż $1$ nie jest ograniczeniem górnym funkcji $f$. Stąd wynika, że $\sup f = 1$. Ponieważ funkcja $f$ jest nieparzysta ( $f(-x) = -x$ dla każdego $x$), więc $\inf f = -1$. ■

**Przykład 6.13** Kresem górnym funkcji sin jest liczba 1, a kresem dolnym funkcji sinus – liczba $-1$. ■

**Przykład 6.14** Kresem górnym funkcji wykładniczej o podstawie $e$ jest $+\infty$, a dolnym – liczba $0$. ■

**Przykład 6.15** Kresem górnym logarytmu naturalnego jest $+\infty$, a kresem dolnym jest $-\infty$. ■

**Przykład 6.16** Kresem górnym funkcji liniowej niestałej jest $+\infty$, a kresem dolnym tej funkcji jest $-\infty$. ■

**Przykład 6.17** Kresem górnym funkcji $f$, danej wzorem $f(x) = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$, jest $+\infty$, a kresem dolnym tej funkcji jest liczba $-3$. ■

**Przykład 6.18** Kresem górnym funkcji $f$ danej wzorem $f(x) = \frac{1}{1+x^2}\sin\frac{1}{x}$ na przedziale otwarto–domkniętym $(0,1]$ jest liczba $1$, a dolnym — liczba $-1$. Wynika to z tego, że dla $x \in (0,1]$ zachodzi nierówność $\left|\frac{1}{1+x^2}\sin\frac{1}{x}\right| < 1$ oraz z równości $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(\frac{2}{(4n+1)\pi}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4n+1)^2\pi^2}{(4n+1)^2\pi^2+1} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(\frac{2}{(4n+3)\pi}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-(4n+3)^2\pi^2}{(4n+3)^2\pi^2+1} = -1$. Widać więc, że w tym przypadku żaden z kresów nie jest wartością funkcji ograniczonej $f$. Można też zauważyć, że z przedstawionego rozumowania wynikają równości $\limsup\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ i $\liminf\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$. ■

Zajmiemy się teraz funkcjami monotonicznymi i ściśle monotonicznymi.

**Definicja 6.15 (funkcji monotonicznych i ściśle monotonicznych)** Funkcja $f$ określona na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ jest

**1.** ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x$, $y$ konsekwencją nierówności $x < y$ jest nierówność $f(x) < f(y)$;

**2.** ściśle malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x$, $y$ konsekwencją nierówności $x < y$ jest nierówność $f(x) > f(y)$;

**3.** nierosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x$, $y$ konsekwencją nierówności $x < y$ jest nierówność $f(x) \geq f(y)$;

**4.** niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x$, $y$ konsekwencją nierówności $x < y$ jest nierówność $f(x) \leq f(y)$. ■

Znów mamy do czynienia z rozszerzeniem pojęcia z ciągów na funkcje. Podamy tylko jeden przykład, bo licznych przykładów dostarczyliśmy już wcześniej w postaci ciągów monotonicznych, a i w przyszłości ich nie zabraknie. Niech $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. Zauważmy, że w całej dziedzinie funkcja nie jest monotoniczna: $-1 < 1$ i jednocześnie $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$, więc funkcja $f$ nie może być nierosnąca, w szczególności nie może być malejąca; $1 < 2$ i jednocześnie $f(1) = 1 > \frac{1}{2} = f(2)$, zatem $f$ nie może być funkcją niemalejącą, tym bardziej rosnącą. Natomiast czytelnik stwierdzi bez trudu, że $f$ jest funkcją ściśle malejącą na każdej z dwu półprostych $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$.

**Twierdzenie 6.16 (o istnieniu granic funkcji monotonicznej)**
Jeśli $f$ jest funkcją monotoniczną, $p$ jest punktem skupienia jej dziedziny, to jeśli istnieje ciąg $(x_n)$ argumentów funkcji $f$ mniejszych niż $p$, zbieżny do $p$, to $f$ ma granicę lewostronną w punkcie $p$, jeśli istnieje ciąg argumentów funkcji $f$ większych niż $p$, zbieżny do $p$, to $f$ ma granicę prawostronną w punkcie $p$.

**Dowód.** Wystarczy oczywiście udowodnić to twierdzenie przy założeniu, że funkcja $f$ jest niemalejąca. Jeśli bowiem $f$ jest nierosnąca, to funkcja przeciwna $-f$ jest niemalejąca. Niech $g$ będzie kresem górnym zbioru złożonego z wartości funkcji $f$ osiąganych w punktach $x < p$ $\quad (g = \sup\{f(x)\colon \ x < p\})$. Trzeba wykazać, że $g = \lim\limits_{x \to p^-} f(x)$. Jeśli $x < p$, to $f(x) \leq g$. Jeśli $m < g$ jest liczbą rzeczywistą, to ponieważ $m$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru tych wartości funkcji $f$, które są osiągane w punktach $x < p$, więc istnieje argument $x' < p$, taki że $f(x') > m$. Stąd wynika, że jeśli $x' < x < p$ to $m < f(x') \leq f(x) \leq g$, zatem: jeśli $x < p$ jest dostatecznie bliskie $p$, to $f(x)$ jest dostatecznie bliskie $g$, co dowodzi tego, że

$g = \lim\limits_{x \to p^-} f(x)$. Analogicznie dowodzimy, że jeśli istnieje ciąg argumentów większych niż $p$, zbieżny do $p$, to kres dolny tych wartości funkcji, które są przyjmowane w punktach większych niż $p$ jest prawostronną granicą funkcji $f$ w punkcie $p$. Dowód został zakończony. ■

Przechodzimy teraz do jednego z najważniejszego pojęć — do ciągłości. Rozpoczniemy od definicji.

**Definicja 6.17 (funkcji ciągłej)**
Funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p$ jest argumentem funkcji i zachodzi jedna z dwu możliwości:

(i) $p$ nie jest punktem skupienia dziedziny funkcji $f$;

(ii) $p$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji $f$, która ma granicę w punkcie $p$ i ta granica jest równa wartości funkcji w punkcie $p$: $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$. ■

**Twierdzenie 6.18 (charakteryzujące ciągłość)**
Funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej $\varepsilon$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeśli $|x - p| < \delta$, to $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

**Dowód.** Jeżeli $p$ nie jest punktem skupienia dziedziny funkcji $f$, to istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jedynym punktem $x$ dziedziny funkcji $f$, dla którego $|x - p| < \delta$ jest punkt $p$ – w tym przypadku $|f(x) - f(p)| = |f(p) - f(p)| = 0 < \varepsilon$, niezależnie od wyboru liczby dodatniej $\varepsilon$. Pozostała część twierdzenia może być otrzymana natychmiast z definicji otoczeniowej granicy funkcji. Dowód został zakończony. ■

Z poznanych twierdzeń o granicach funkcji wynika od razu następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.19 (o operacjach na funkcjach ciągłych)**
Załóżmy, że funkcje $f$ i $g$ określone na wspólnej dziedzinie są ciągłe w punkcie $p$. Wtedy następujące funkcje są ciągłe w punkcie $p$: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$ pod warunkiem $g(p) \neq 0$. ■

Ważną operacją jest składanie (superponowanie) funkcji. Polega ono na „wykonaniu” po kolei dwu funkcji: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Okazuje się, że składając funkcje ciągłe otrzymujemy w rezultacie funkcję ciągłą.

**Twierdzenie 6.20 (o ciągłości złożenia dwu funkcji)**
Jeżeli funkcja $g$ jest ciągła w punkcie p, funkcja $f$ określona na zbiorze zawierającym zbiór wartości funkcji $g$ jest ciągła w punkcie $g(p)$, to złożenie $f \circ g$ jest funkcją ciągłą w punkcie $p$.

**Dowód.** Wynika to od razu z otoczeniowej definicji ciągłości: jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje $\delta > 0$, takie że jeśli $|y - g(p)| < \delta$, to $|f(y) - f\big(g(p)\big)| < \varepsilon$, istnieje też $\eta > 0$, takie że jeśli $|x - p| < \eta$, to $|g(x) - g(p)| < \delta$, a wobec tego $|f\big(g(x)\big) - f\big(g(p)\big)| < \varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

Nie jest natomiast prawdą, że funkcja odwrotna do funkcji $f$ ciągłej w punkcie $p$ musi być ciągła w punkcie $f(p)$. Zachęcamy czytelników do samodzielnego skonstruowania przykładu. Musi on być nieco dziwaczny, bowiem jeśli założymy, że funkcja $f$ jest ciągła w całej dziedzinie, która jest przedziałem, to wtedy funkcja odwrotna musi być ciągłą, mówimy o funkcji, której wartościami są liczby rzeczywiste. Tego twierdzenia jednak nie udowodnimy teraz, bowiem jego dowód stanie się łatwiejszy później.

Podamy jeszcze twierdzenie pozwalające w licznych przypadkach stwierdzać ciągłość popularnych funkcji.

**Twierdzenie 6.21 (o ciągłości funkcji monotonicznej)**
Jeśli funkcja monotoniczna $f$ określona na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ przekształca zbiór $X$ *na* przedział, to jest ciągła w każdym punkcie zbioru $X$.

**Dowód.** Dla ustalenia uwagi załóżmy, że funkcja $f$ jest niemalejąca. Jeśli $p \in A$ jest granicą ciągu $(a_n)$ punktów zbioru $A$ mniejszych niż $p$, to istnieje granica $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) \leq f(p)$. Ponieważ dla $x \geq p$ zachodzi nierówność $f(x) \geq f(p)$, a dla $x < p$ zachodzi nierówność $f(x) \leq \lim\limits_{x \to p^-} f(x)$, więc z tego, że obrazem zbioru $A$ jest przedział, wynika, że $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = f(p)$: gdyby było $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) < f(p)$, to punkty przedziału $\big(\lim\limits_{x \to p^-} f(x), f(p)\big)$ byłyby poza zbiorem $f(A)$, więc nie byłby on przedziałem. Analogicznie: jeśli istnieje ciąg $(a'_n)$ większych niż $p$ zbieżny do $p$, to $f(p) = \lim\limits_{x \to p^+} f(x)$. Stąd wynika, że $f$ jest ciągła w punkcie $p$. Dowód został zakończony. ■

**Wniosek 6.22**
Jeśli $f$ jest funkcją monotoniczną określoną na przedziale $P$, to $f$ jest ciągła w każdym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ przekształca przedział $P$ *na* pewien przedział (zdegenerowany do punktu w przypadku, gdy $f$ jest funkcją stałą). ■

**Wniosek 6.23 (o liczbie punktów nieciągłości funkcji monotonicznej)**
Jeśli $X \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem niepustym, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją monotoniczną, to zbiór punktów nieciągłości funkcji $f$ jest co najwyżej przeliczalny.

**Dowód.** Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że funkcja $f$ jest niemalejąca. Jeśli

$p \in X$ jest punktem, w którym funkcja $f$ jest nieciągła, to zachodzi co najmniej jedna z nierówności $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) < f(p)$, $f(p) < \lim\limits_{x \to p^+} f(x)$. Niech $w_p$ będzie taką liczbą wymierną, że $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) < w_p < f(p)$, a jeśli $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = f(p)$, to taką, że $f(p) < w_p < \lim\limits_{x \to p^+} f(x)$. Z tego określenia wynika, że jeśli $p < q$ i $f$ jest nieciągła w obydwóch punktach, to $w_p < w_q$. Wynika stąd, że różnym punktów nieciągłości odpowiadają różne liczby wymierne. Teza wynika z przeliczalności zbioru wszystkich liczb wymiernych. ■

**Przykład 6.19** Funkcja stała jest ciągła w każdym punkcie. ■

**Przykład 6.20** Funkcja *identyczność*, czyli funkcja, której wartością w punkcie $x$ jest liczba $x$ jest ciągła w każdym punkcie prostej — wynika to natychmiast z definicji ciągłości. Zamiast mówić funkcja *identyczność* będziemy mówić funkcja $x$, rozumiejąc, że jest ona określona na całej prostej. ■

**Przykład 6.21** Funkcje $x^2$, $x^3$, ... są ciągłe w każdym punkcie prostej. Wynika to natychmiast z twierdzenia o ciągłości iloczynu funkcji ciągłych i poprzedniego przykładu. ■

**Przykład 6.22** Każdy wielomian, czyli funkcja postaci $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, gdzie $a_0$, $a_1$, $\ldots$, $a_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, jest ciągła w każdym punkcie prostej. Wynika to z poprzednich przykładów oraz twierdzenia o ciągłości iloczynu i sumy funkcji: funkcja postaci $a_jx^j$ jest iloczynem funkcji stałej o wartości $a_j$ oraz funkcji $x^j$, wielomian jest sumą takich funkcji. ■

**Przykład 6.23** Funkcja $\frac{x-1}{x+3}$, której dziedziną jest zbiór złożony ze wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby $-3$ jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny, bo jest ilorazem funkcji ciągłych. ■

**Przykład 6.24** Funkcja wykładnicza $e^x$ jest ciągła. Wykazaliśmy to wcześniej, zresztą wynika to od razu z tego, że $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, bo z tej równości wynika, że $\lim\limits_{h \to 0} e^{x+h} = \lim\limits_{h \to 0} \left( \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \cdot h + e^x \right) = 1 \cdot 0 + e^x = e^x$. Inne uzasadnienie uzyskujemy powołując się na monotoniczność funkcji wykładniczej i to, że zbiorem jej wartości jest **przedział** $(0, \infty)$. ■

**Przykład 6.25** Logarytm naturalny (o podstawie $e$) jest funkcją ciągłą. Wynika to stąd, że zbiorem wartości logarytmu naturalnego jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. ■

**Przykład 6.26** Dla każdej liczby rzeczywistej $a$ funkcja potęgowa $x^a$ o wykładniku $a$ jest ciągła w każdym punkcie półprostej $(0,+\infty)$. Wynika to z ciągłości logarytmu naturalnego, ciągłości funkcji wykładniczej o podstawie $e$ i ciągłości iloczynu oraz złożenia funkcji ciągłych: $x^a = e^{a\ln x}$. ■

**Przykład 6.27** Jeśli $a>0$, to funkcja $x^a$ jest ciągła w punkcie 0, jej wartość w punkcie 0 definiujemy w tym przypadku jako 0. Zakładamy oczywiście, że dziedziną funkcji $x^a$ jest $[0,\infty)$. Musimy udowodnić, że jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^a = 0$. Jest tak dla $a=\frac{1}{k}$, $k$ — dowolna liczba całkowita większa niż 1, bo gdyby tak nie było, to istniałyby ciąg $(x_n)$ i liczba $g$ takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = g \neq 0$, jednak wtedy zachodziłaby równość

$$0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{x_n}\right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n}\right)^k = g^k \neq 0\,.$$

W przypadku dowolnego $a$ znajdujemy najpierw dodatnią liczbę całkowitą $k>\frac{1}{a}$. Dla każdej liczby nieujemnej $x<1$ mamy wtedy $0\le x^a \le x^{1/k}$. Teza wynika teraz z twierdzenia o trzech ciągach. ■

**Przykład 6.28** Jeśli $a=\frac{p}{q}$, gdzie $q$ jest nieparzystą liczbą całkowitą dodatnią, zaś $p$ liczbą całkowitą ujemną, to funkcja $x^a = \sqrt[q]{x^p}$ jest ciągła w każdym punkcie półprostej $(-\infty,0)$. Wynika to od razu z ciągłości funkcji pierwiastek $q$–tego stopnia, ciągłości wielomianu i ciągłości ilorazu funkcji ciągłych oraz twierdzenia o ciągłości złożenia. ■

W ostatnich trzech przykładach wykazaliśmy, że funkcja potęgowa jest ciągła wszędzie tam, gdzie jest określona.

**Przykład 6.29** Funkcje sinus i kosinus są ciągłe w każdym punkcie prostej. Jest to konsekwencja nierówności $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$ oraz $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$. ■

**Przykład 6.30** Funkcja arcsin jest ciągła na przedziale $[-1,1]$, bo zbiorem jej wartości jest **przedział** $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ■

**Przykład 6.31** Funkcja arctg jest ciągła na całej prostej, bo zbiorem jej wartości jest **przedział** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. ■

**Przykład 6.32** Dla każdej liczby rzeczywistej $a>0$ funkcja wykładnicza $a^x$ jest ciągła w każdym punkcie prostej rzeczywistej. Wynika to z tego, że $a^x = e^{x\ln a}$, twierdzeń o ciągłości iloczynu i złożenia oraz ciągłości funkcji wykładniczej o podstawie $e$ i ciągłości identyczności oraz funkcji stałej. ■

Z tych przykładów wynika, że każda funkcja, którą można zdefiniować „wzorem” używając standardowych funkcji, jest ciągła w całej swojej dziedzinie, np. funkcja $\exp\left(\dfrac{\sin(x^2-12x+2)}{\mathrm{tg}(\cos x+\ln x)}\right)-\sin\sqrt{x^4-113}$. Wynika to z wielokrotnego stosowania twierdzeń o ciągłości złożenia, sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu. Mogłoby więc powstać wrażenie, że wszystkie funkcje są ciągłe. Tak jednak nie jest. Podamy poniżej kilka przykładów.

**Przykład 6.33** $\mathrm{sgn}(x)=\frac{|x|}{x}$ dla $x\neq 0$ oraz $f(0)=0$, ta funkcja jest ciągła w każdym punkcie $p\neq 0$, bo wtedy jest stała w pewnym przedziale otwartym zawierającym $p$, w punkcie 0 ta funkcja jest nieciągła, bowiem jej granica prawostronna jest w tym punkcie równa 1, lewostronna jest równa $-1$, więc funkcja sgn (znak liczby) nie ma granicy w punkcie 0. ■

**Przykład 6.34** Niech $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ dla $x\neq 0$, $f(0)=0$. Funkcja tak zdefiniowana nie ma granicy w punkcie 0, więc nie jest w tym punkcie ciągła. We wszystkich innych punktach jest ciągła jako złożenie funkcji ciągłej sinus z funkcją ciągłą $\frac{1}{x}$. ■

**Przykład 6.35** Niech $f(x)=1$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=0$. Funkcja ta jest nieciągła w punkcie $0$, choć ma w tym punkcie granicę, jednak ta granica nie jest równa wartości funkcji w punkcie $0$. W innych punktach $p$ funkcja jest ciągła, bo jest stała na pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt $p$. Oczywiście można uznać ten przykład za sztuczny. ■

**Przykład 6.36** Niech $V(t)$ oznacza objętość jednego kilograma wody w temperaturze $t$, ciśnienie jest stałe, tzw. normalne i niezależne od temperatury. Ze szkolnych lekcji fizyki wiadomo, że funkcja $V$ ma nieciągłość w punkcie $0$ tj. w temperaturze, w której następuje przejście ze stanu ciekłego w stały lub odwrotnie, zresztą w punkcie $0$ funkcja jest z punktu widzenia fizyki niezdefiniowana, ze względu na zmianę stanu skupienia. Granice jednostronne istnieją: prawostronna jest mniejsza niż lewostronna (dlatego lód pływa w wodzie wystając z niej). Przykład ten podajemy po to, by czytelnicy tego tekstu zdawali sobie sprawę, że w niektórych sytuacjach pojawiają się funkcje nieciągłe w naturalnych sposób. ■

**Przykład 6.37** Niech $f(x)=1$, jeśli liczba $x$ jest wymierna, tj. $x$ jest ilorazem dwu liczb całkowitych i niech $f(x)=0$, jeśli $x$ jest liczbą niewymierną, np. jeśli $x=\frac{m}{n}\sqrt{2}$, gdzie $m$, $n$ są liczbami całkowitymi różnymi od $0$. Funkcja ta nie ma granicy w żadnym punkcie, bo każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych, np. swoich przybliżeń dziesiętnych oraz granicą ciągu liczb niewymiernych.

W pierwszym przypadku ciąg wartości funkcji dąży do 1, a w drugim do 0. Wobec tego funkcja ta jest nieciągła w każdym punkcie! Można udowodnić, to jest łatwe!, że $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}(\cos(k!\pi x))^{2n}\right)$, więc ta dziwna funkcja może być otrzymana w wyniku podwójnego przejścia granicznego z funkcji uważanych za podstawowe. $\blacksquare$

Potrzebne nam będą jeszcze dwie definicje. Chodzi o to, że w wielu przypadkach pojawiać się będą funkcje ciągłe, które będą jeszcze dodatkowe własności. Zrozumienie trzech definicji jest — wbrew pozorom — łatwiejsze niż zrozumienie jednej z nich.

**Definicja jednostajnej ciągłości**

Funkcja $f$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in X}\big(|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\big)\,.\ \blacksquare$$

**Definicja warunku Lipschitza**

Funkcja $f$ spełnia warunek Lipschitza na zbiorze $A$ ze stałą dodatnią $L<+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x,y\in A$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|\,.\ \blacksquare$$

Jest jasne, że funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest jednostajnie ciągła: wystarczy przyjąć, że $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$. Jest też jasne, że funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła. Istnieją funkcje ciągłe, które nie są jednostajnie ciągłe.

**Przykład 6.38** Funkcja $x^2$ rozpatrywana na całej prostej nie jest ciągła jednostajnie. Załóżmy bowiem, że $\varepsilon=1$ oraz że istnieje taka liczba $\delta>0$, że jeżeli $|x-y|<\delta$, to $|x^2-y^2|<1=\varepsilon$. Niech $x=\frac{1}{\delta}$ i niech $y=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$. Wtedy jednak zachodzi nierówność $|x^2-y^2|=1+\left(\frac{\delta}{2}\right)^2>1=\varepsilon$, więc wbrew przypuszczeniu nie istnieje liczba $\delta$ spełniająca żądany warunek. $\blacksquare$

Można wykazać, że funkcje $e^x$ na całej prostej, $\ln x$ na półprostej $(0,+\infty)$ itp. nie są jednostajnie ciągłe, choć zmniejszenie dziedziny może zmienić sytuację.

**Przykład 6.39** Funkcja $e^x$ spełnia warunek Lipschitza na półprostej postaci $(-\infty,a]$ dla każdej liczby rzeczywistej $a$. Jeśli bowiem $y<x\le a$, to

$$|e^x-e^y|=e^x(1-e^{y-x})\le e^x\big(1-(1+(y-x))\big)=e^x(x-y)\le e^a|x-y|\,.\ \blacksquare$$

**Przykład 6.40** Funkcja liniowa $ax+b$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $|a|$, co wynika od razu z równości $|(ax+b)-(ay+b)|=|a|\cdot|x-y|$.

**Przykład 6.41** Funkcja $x^2$ rozpatrywana nie na całej prostej, lecz na przedziale $[-M,M]$, gdzie $M>0$, spełnia warunek Lipschitza ze stałą $2M$, bowiem

$$|x^2-y^2|=|x-y||x+y|\le|x-y|(|x|+|y|)\le 2M|x-y|\,.$$

**Przykład 6.42** Funkcja $\sqrt{x}$ rozpatrywana na całej prostej jest jednostajnie ciągła ale nie spełnia warunku Lipschitza: jeśli $x > y$, to $0 < \sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{x-y}$, co można wykazać przenosząc $\sqrt{y}$ na prawą stronę nierówności, a następnie podnosząc obie strony nierówności do kwadratu — z tej nierówności wynika jednostajna ciągłość, starczy przyjąć, że $\delta = \varepsilon^2$. Z warunku Lipschitza wynikałoby, że

$$L \geq \frac{\sqrt{1/n} - \sqrt{0}}{1/n - 0} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty\,,$$

co oczywiście przeczy temu, że $L < +\infty$. ■

Wykazaliśmy więc, że

*warunek Lipschitza* $\Longrightarrow$ *jednostajna ciągłość* $\Longrightarrow$ *ciągłość*

oraz że żadna z tych implikacji nie może być zastąpiona równoważnością.

Warto jeszcze dodać, że w definicji (otoczeniowej) ciągłości funkcji w punkcie żąda się istnienia liczby $\delta > 0$ i że takie samo żądanie występuje w definicji ciągłości jednostajnej. Różnica polega na tym, że w definicji ciągłości liczba $\delta > 0$ jest dopasowywana do punktu, w którym badana jest ciągłość i do liczby $\varepsilon > 0$, natomiast w definicji ciągłości jednostajnej $\delta > 0$ zależy **tylko** od $\varepsilon$.