Szeregi o wyrazach dowolnych znaków, dwumian Newtona

Poprawiłem 9 czerwca 2016 r, godz 20:01

Twierdzenie 5.1 (kryterium Abela – Dirichleta)

Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem liczb dodatnich.

D. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i ciąg sum częściowych szeregu $\sum b_n$ jest ograniczony, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

A. Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n b_n$ też jest zbieżny.

W obu przypadkach zakładamy, że $b_n \in \mathbb{C}$ *dla* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Dowód. Niech $s_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Zachodzi równość

$$a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+k}b_{n+k} =$$
$$= (s_{n+1} - s_n)a_{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1})a_{n+2} + \cdots + (s_{n+k} - s_{n+k-1})a_{n+k} =$$
$$=(s_{n+1} - s_n)(a_{n+1} - a_{n+2}) + (s_{n+2} - s_n)(a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots +$$
$$+ (s_{n+k-1} - s_n)(a_{n+k-1} - a_{n+k}) + a_{n+k}(s_{n+k} - s_n).$$

Jeśli $|s_j| \leqslant M$ dla każdej liczby $j \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$, to

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+k}b_{n+k}| \leqslant 2M\big(|a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \cdots +$$
$$+ |a_{n+k-1} - a_{n+k}|\big) + 2Ma_{n+k} = 2Ma_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

zatem spełniony jest warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu $\sum a_n b_n$, co kończy dowód twierdzenia w przypadku Abela.

Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny a ε jest liczbą dodatnią, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n nierówność $|s_{n+j} - s_n| < \varepsilon$ zachodzi dla $j = 1, 2, \ldots$ (warunek Cauchy'ego). Wobec tego

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+k}b_{n+k}| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\big(|a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}|\big) + \varepsilon a_{n+k} = \varepsilon a_{n+1}.$$

Wynika stąd, że szereg $\sum a_n b_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny. ■

Uwaga 5.2 Kryterium Dirichleta to rozszerzenie poznanego już wcześniej kryterium Leibniza. By przekonać się o tym wystarczy przyjąć $b_n = (-1)^n$. ■

Przykład 5.1 Dla każdej liczby $z \neq -1$ takiej, że $|z| = 1$ szereg $\sum \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$ jest zbieżny. Wynika to z kryterium Dirichleta, bowiem ciąg $\big(z - z^2 + \cdots + (-1)^{n-1}z^n\big)$, czyli ciąg $\big(\frac{z-(-1)^{n-1}z^n}{1+z}\big)$ jest ograniczony przez $\frac{2}{|1+z|}$ a ciąg $\big(\frac{1}{n}\big)$ jest malejący i zbieżny do 0.

Dodać wypada, że jeśli $|z| < 1$, to szereg $\sum \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$ jest zbieżny bezwzględnie, wynika to natychmiast z kryterium porównawczego: $\big|\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}\big| \leqslant |z|^n$ i zbieżności szeregu geometrycznego o ilorazie mniejszym niż 1. ■

Definicja 5.3 (symbolu Newtona)

Dla każdej liczby zespolonej a przyjmujemy $\binom{a}{0} = 1$ i $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$ dla każdej liczby naturalnej $n > 0$.

Stwierdzenie 5.4

Dla każdej liczby zespolonej a i każdej liczby naturalnej $n > 0$ zachodzą równości $\binom{a}{n-1} + \binom{a}{n} = \binom{a+1}{n}$ i $\binom{a+1}{n} = \frac{a+1}{n}\cdot\binom{a}{n-1}$. ■

Dowód tego stwierdzenia to banalne sprawdzenie z definicji (dla osób, które potrafią dodawać ułamki), więc pomijamy ten rachunek.

Przykład 5.2 Szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdej liczby $a\in\mathbb{C}$, jeśli $|z| < 1$. Zachodzi bowiem wzór $\left|\frac{\binom{a}{n+1}z^{n+1}}{\binom{a}{n}z^n}\right| = \left|\frac{a-n}{n+1}\cdot z\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z| < 1$. Niech $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n$, z jest teraz ustaloną liczbą zespoloną, której wartość bezwzględna jest *mniejsza* niż 1. Z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów wynika, że prawdziwy jest wzór

$$f(a)f(b) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j}\right)z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}z^n = f(a+b),$$

bowiem $\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$.

Wykażemy, że ta równość jest prawdziwa dla dowolnych liczb zespolonych a, b. Gdy a i b są liczbami naturalnymi większymi od n, to ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $(1+x)^a\cdot(1+x)^b = (1+x)^{a+b}$ (dla zespolonych też, ale z tego nie skorzystamy), zatem współczynniki po obu stronach przy x^n otrzymane po podniesieniu do potęg i wymnożeniu są równe.

Obie strony równości $\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$ można potraktować jako wielomiany zmiennej a, stopnia $\leqslant n$, ich wartości pokrywają się w nieskończenie wielu punktach, zatem te wielomiany są równe. Wobec tego $\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$ dowolnego $a\in\mathbb{C}$, o ile b jest liczbą naturalną $> n$. Teraz traktujemy obie stron jako wielomiany zmiennej b, liczbę a ustalamy. Znów obie strony są wielomianami stopnia $\leqslant n$, których wartości pokrywają się w nieskończenie wielu punktach ($b > n$, naturalne) i wobec tego pokrywają się zawsze.

A teraz przedstawimy dowód indukcyjny tej równości, by uniknąć korzystania z twierdzenia o jednoznaczności współczynników funkcji wielomianowej, którego jeszcze nie mieliśmy okazji wykazać. Mamy $\binom{a+b}{0} = 1 = 1\cdot 1 = \binom{a}{0}\cdot\binom{b}{0}$. Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla każdej liczby naturalnej $k\leqslant n$ dla dowolnych liczb zespolonych a, b. Udowodnimy równość $\binom{a+b}{n+1} = \binom{a}{0}\binom{b}{n+1} + +\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}\cdots + \binom{a}{n-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{n}\binom{b}{0}$.

Skorzystamy w dowodzie z łatwej do udowodnienia równości $(j+1)\binom{c}{j+1}=c\binom{c-1}{j}$, która zachodzi dla każdej liczby naturalnej j i każdej liczby zespolonej c. Mamy więc $(n+1)\binom{a+b}{n+1}=(a+b)\binom{a+b-1}{n}=a\binom{a+b-1}{n}+b\binom{a+b-1}{n} \overset{\text{założenie}}{\underset{\text{indukcyjne}}{=\!=\!=}}$

$$=a\sum_{j=0}^{n}\binom{a-1}{j}\binom{b}{n-j}+b\sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b-1}{n-j}=\sum_{j=0}^{n}(j+1)\binom{a}{j+1}\binom{b}{n-j}+\sum_{j=0}^{n}(n-j+1)\binom{a}{j}\binom{b}{n-j+1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n+1}j\binom{a}{j}\binom{b}{n+1-j}+\sum_{j=0}^{n}(n+1-j)\binom{a}{j}\binom{b}{n-j}=$$

$$=(n+1)\binom{a}{n+1}\binom{b}{0}+\sum_{j=1}^{n}(n+1)\binom{a}{j}\binom{b}{n+1-j}+(n+1)\binom{a}{0}\binom{b}{n+1}=(n+1)\sum_{j=0}^{n+1}\binom{a}{j}\binom{b}{n+1-j}.$$

Dowód został zakończony. ∎

Przykład 5.3 Obliczymy granicę $\lim\limits_{a\to 0}\frac{f(a)-1}{a}$.

Oznacza to, że wykażemy, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ i $\forall_n a_n\neq 0$, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-1}{a_n}$ i ta granica nie zależy od wyboru ciągi (a_n).

Jeśli $a\neq 0$, to

$$\frac{f(a)-1}{a}=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}z^n=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1-a)(2-a)\ldots(n-1-a)}{n!}(-1)^{n-1}z^n.$$

Na tzw. „chłopski rozum" powinna więc zachodzić równość

$$\lim_{a\to 0}\frac{f(a)-1}{a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}:=L(z).^*$$

Udowodnimy tę hipotetyczną (na razie) równość. Jeśli $|a|<1$ i $n>1$, to

$$\left|\frac{(1-a)(2-a)\ldots(n-1-a)}{n!}(-1)^{n-1}z^n\right|\leqslant\frac{(1+|a|)(2+|a|)\ldots(n-1+|a|)}{n!}|z|^n\leqslant\frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{n!}|z|^n=|z|^n,$$

zatem $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\frac{(1-a)(2-a)\ldots(n-1-a)}{n!}(-1)^{n-1}z^n\right|\leqslant\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}|z|^n=\frac{|z|^{k+1}}{1-|z|}$

Stąd wynika, że jeżeli $\varepsilon>0$, to istnieje takie $k>1$, że zachodzi nierówność (przypominamy: z nie zmienia się i $|z|<1$):

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{(1-a)(2-a)\ldots(n-1-a)}{n!}(-1)^{n-1}z^n\right|\leqslant\sum_{n=k+1}^{\infty}|z|^{n+1}=\frac{|z|^{k+1}}{1-|z|}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Stąd i z tego, że $\lim\limits_{a\to 0}\frac{(1-a)(2-a)\ldots(n-1-a)}{n!}=\frac{1}{n}$ dla $n=2,3,\ldots,k$, wynikają kolejne nierówności

[*] Autor przypuszcza, że w niektórych wsiach niektórzy chłopi (rolnicy) mogą nie mieć poglądu w tej kwestii, np. z braku zainteresowania nią. Zauważmy jeszcze, że $\lim_{k\to\infty}(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+k})=1\neq 0=\lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty}\frac{n}{n+k})$. Pokazaliśmy, że kolejność przechodzenia do granicy może wpływać na wartość granicy, a właśnie z takim problemem mamy teraz do czynienia.

$$\left| z + \sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} (-1)^{n-1} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \right| <$$

$$< \tfrac{2\varepsilon}{3} + \left| \sum_{n=2}^{k} \left(\tfrac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} - \tfrac{1}{n} \right) (-1)^{n-1} z^n \right| < \varepsilon \,,$$

jeśli tylko liczba $\delta > 0$ jest dostatecznie mała i $|a| < \delta$. Oznacza to, że

$$\lim_{a \to 0} \tfrac{f(a)-1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n-1} z^n}{n} =: L(z) \,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności zespolonej funkcji wykładniczej wynika, że równość $f(a) = e^{aL(z)}$ ma miejsce dla każdej liczby zespolonej a. Podstawiając $a = 1$ otrzymujemy $e^{L(z)} = f(1) = 1+z$, zatem $L(z) = \ln(1+z)$. Jeśli liczba z jest rzeczywista, to mamy do czynienia z logarytmem dobrze znanym, rzeczywistym. Jeśli natomiast liczba z rzeczywista nie jest, to jest to jedna z nieskończenie wielu możliwych wartości logarytmu zespolonego. Otrzymaliśmy więc wzór

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n = f(a) = e^{aL(z)} = e^{a \ln(1+z)} = (1+z)^a \,.$$

Z tych równości wynika między innymi, że jeśli $|z| < 1$, to $e^{\ln(1+z)} = 1 + z$. Dodać należy, że równość $e^{a\ln(1+z)} = (1+z)^a$ jest twierdzeniem w przypadku rzeczywistej liczby z, jeżeli liczba z nie jest rzeczywista, to należy tę równość potraktować jako definicję potęgi o podstawie $1+z$. Ogólnie przyjmujemy, że $z^w = e^{w \ln z}$, gdzie $\ln z$ oznacza dowolną liczbę zespoloną, dla której zachodzi wzór $z = e^{\ln z}$. Kwestiami tymi nie będziemy się zbyt dokładnie zajmować, bo na ogół używana jest potęga o podstawie e, inne bywają używane, ale nieporównanie rzadziej.

Udowodnimy jeszcze, zwykle niedowodzone na I roku studiów,

Twierdzenie 5.5 (o wartościach sumy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$)

Jeśli $|z| < 1$, to zachodzi nierówność

$$|\mathrm{Im}\,(L(z))| = \left| \left(\mathrm{Im} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \right) \right) \right| = \left| \mathrm{Im} \left(z - \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^3}{3} - \tfrac{z^4}{4} + \cdots \right) \right| < \tfrac{\pi}{2} \,.$$

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje taka liczba z_0, że $|z_0| < 1$ oraz $\left| \mathrm{Im} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n-1} z_0^n}{n} \right) \right| \geqslant \tfrac{\pi}{2}$. Definiujemy:

$$g(s) = |\mathrm{Im}\,(L(sz_0))| = \left|\mathrm{Im}\left(sz_0 - \tfrac{1}{2}(sz_0)^2 + \tfrac{1}{3}(sz_0)^3 - \tfrac{1}{4}(sz_0)^4 + \cdots\right)\right|.$$

Niech $t = \inf\{\tau > 0: \quad g(\tau) \geqslant \frac{\pi}{2}\}$. Udowodnimy, że t jest najmniejszą liczbą dodatnią, dla której $g(t) = \frac{\pi}{2}$, co jest prawie oczywiste.*

Ponieważ $g(1) = |\mathrm{Im}\,(L(z_0))| \geqslant \frac{\pi}{2}$, więc $t \leqslant 1$.

Niech $r = |z_0| < 1$. Oczywiście $r = |z_0| > 0$. Jeśli $|z_1| \leqslant r$ i $|z_2| \leqslant r$, to $|L(z_1) - L(z_2)| = |z_1 - z_2| \cdot |1 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + \frac{1}{3}(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) -$
$- \frac{1}{4}(z_1^3 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + z_2^3) + \cdots| \leqslant |z_1 - z_2|(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots) = \frac{1}{1-r}|z_1 - z_2|$.
Wobec tego $|g(\tau_1) - g(\tau_2)| \leqslant \frac{|z_0|}{1-r} \cdot |\tau_1 - \tau_2|$. Udowodnimy, że $g(t) = \frac{\pi}{2}$. Jeżeli $g(t) > \frac{\pi}{2}$ i $0 < t - \tau < \frac{1-r}{|z_0|}\big(g(t) - \frac{\pi}{2}\big)$, to

$$g(t) - g(\tau) \leqslant |g(t) - g(\tau)| \leqslant \tfrac{|z_0|}{1-r} \cdot |t - \tau| < \tfrac{|z_0|}{1-r} \cdot \tfrac{1-r}{|z_0|}\big(g(t) - \tfrac{\pi}{2}\big) = g(t) - \tfrac{\pi}{2},$$

zatem $g(\tau) > \frac{\pi}{2}$, wbrew temu, że $g(\tau) < \frac{\pi}{2}$ dla $\tau < t$. Wobec tego $g(t) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Podobnie z nierówności $g(t) < \frac{\pi}{2}$ i nierówności $0 < \tau - t < \frac{1-r}{|z_0|}\big(\frac{\pi}{2} - g(t)\big)$ wynika, że $g(\tau) < \frac{\pi}{2}$, co też jest niemożliwe. Wobec tego $|\mathrm{Im}\,(L(tz_0))| = g(t) = \frac{\pi}{2}$.

Wynika stąd, że

$$1 + tz_0 = e^{L(tz_0)} = e^{\pm i\pi/2} \cdot e^{\mathrm{Re}(L(tz_0))} = \pm i e^{\mathrm{Re}(L(tz_0))},$$

więc $\mathrm{Re}(1 + tz_0) = 0$, a to nieprawda, bo z nierówności $|tz_0| < 1$, wynika, że $\mathrm{Re}(1 + tz_0) > 0$. Dowód został zakończony. ■

Zakończymy opowieść o szeregach liczbowych twierdzeniem, które mówi, że jeśli nawet iloczyn Cauchy'ego szeregów zbieżnych nie jest zbieżny, to i tak należy o nim myśleć jako o ich iloczynie.

Twierdzenie 5.6 (Cesàro)

Niech $\sum a_n$ i $\sum b_n$ będą szeregami zbieżnymi. Niech $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$, $C_n = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots c_n$. Zachodzi wtedy równość:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(C_0 + C_1 + \cdots + C_n\right) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

Dowód. Mamy

$$C_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots a_n b_0) =$$
$$= a_0\,(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1\,(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_{n-1}\,(b_0 + b_1) + a_n b_0 =$$
$$= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_{n-1} B_1 + a_n B_0$$

i wobec tego

*Dowód tylko dlatego jest konieczny, że nie pojawiło się jeszcze twierdzenie Bolzano–Cauchy'ego o przyjmowaniu wartości pośrednich przez funkcję ciągłą.

$$
\begin{aligned}
&C_0 + C_1 + \cdots + C_n = \\
&= a_0B_0 + (a_0B_1 + a_1B_0) + (a_0B_2 + a_1B_1 + a_2B_0) + \\
&\qquad\qquad + \cdots + (a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_{n-1}B_1 + a_nB_0) = \\
&= B_0(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + B_1(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \cdots + B_na_0 = \\
&\qquad\qquad = B_0A_n + B_1A_{n-1} + B_2A_{n-2} + \cdots + B_nA_0\,.
\end{aligned}
$$

Niech $\varepsilon > 0$. Niech $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ i niech $M > 0$ będzie taką liczbą, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $|a_0 + a_1 + \cdots + a_n| \leqslant M$, $|b_0 + b_1 + \cdots + b_n| \leqslant M$. Niech n_ε będzie taką liczbą naturalną, że dla $n \geqslant n_\varepsilon$ zachodzą nierówności $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{4M}$ i $|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Niech wreszcie $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ będzie liczbą naturalną tak dużą, że nierówność $\frac{8M^2n_\varepsilon}{\varepsilon} - 1 < n$, czyli $\frac{2M^2n_\varepsilon}{n+1} < \frac{\varepsilon}{4}$, zachodzi dla $n \geqslant m_\varepsilon$. Wtedy dla dowolnych numerów i, j zachodzą nierówności $|A_iB_j - AB| \leqslant |A_i|\cdot|B_j| + |A|\cdot|B| \leqslant 2M^2$. Jeśli zaś $i \geqslant m_\varepsilon$ oraz $j \geqslant m_\varepsilon$, to $|A_iB_j - AB| \leqslant |A_i - A|\cdot|B_j| + |A|\cdot|B_j - B| < \frac{\varepsilon}{4M}\cdot M + M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd zaś wynika, że

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{n+1}(A_0B_n + A_1B_{n-1} + \cdots + A_{n-1}B_1 + A_nB_0) - AB\right| \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{n+1}(|A_0B_n - AB| + |A_1B_{n-1} - AB| + \cdots + |A_{n-1}B_1 - AB| + |A_nB_0 - AB|) \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{n+1}(|A_0B_n - AB| + |A_1B_{n-1} - AB| + \cdots + |A_{n_\varepsilon-1}B_{n-n_\varepsilon+1} - AB|) + \\
&\quad + \tfrac{1}{n+1}(|A_{n_\varepsilon}B_{n-n_\varepsilon} - AB| + |A_{n_\varepsilon+1}B_{n-n_\varepsilon-1} - AB| + \cdots + |A_{n-n_\varepsilon}B_{n_\varepsilon} - AB|) + \\
&\qquad + \tfrac{1}{n+1}(|A_{n-n_\varepsilon+1}B_{n_\varepsilon-1} - AB| + \cdots + |A_{n-1}B_1 - AB| + |A_nB_0 - AB|) < \\
&< \tfrac{n_\varepsilon}{n+1}\cdot 2\cdot M^2 + \tfrac{n+1-2n_\varepsilon}{n+1}\cdot\tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{n_\varepsilon}{n+1}\cdot 2\cdot M^2 < \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

Wykazaliśmy więc, że jeśli n jest dostatecznie duże ($n > m_\varepsilon$), to

$$\left|\frac{1}{n+1}(C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-1} + C_n) - AB\right| < \varepsilon\,,$$

a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}(C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-1} + C_n) = AB$. ■