Szeregi liczbowe — wstęp

3 grudnia 2007 poprawiłem dowód twierdzenia o przybliżeniach dziesiętnych

Zajmiemy się teraz ciągami nieskończonym, ale zapisywanymi w postaci sum.

Definicja 2.1 (szeregu)
Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. *Szeregiem* o wyrazach $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nazywamy ciąg, którego kolejnymi wyrazami są sumy początkowych wyrazów ciągu (a_n) : $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ...
Liczby s_0 , s_1 , s_2 , ... nazywane są *sumami częściowymi* szeregu o wyrazach a_0 , a_1 , a_2 , ...
Szereg o wyrazach $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oznaczamy symbolem $a_0+a_1+a_2+\ldots$ lub symbolem $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, czasem też $\sum a_n$, jeśli nie jest istotne od jakiego wyrazu rozpoczynamy sumowanie.
Jeśli ciąg sum częściowych szeregu ma granicę, to nazywamy ją *sumą* szeregu, jeśli suma szeregu jest skończona, to szereg nazywamy *zbieżnym*, jeśli suma szeregu jest nieskończona lub jeśli ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy, to szereg nazywamy *rozbieżnym*. Jeśli szereg ma sumę, skończoną lub nieskończoną, to oznaczamy ją tak samo jak szereg: $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ lub $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. ■

Z doświadczenia wynika, że w tym przypadku pewna dwuznaczność oznaczeń nie prowadzi do nieporozumień, a nawet jest ułatwieniem.

Tak jak w przypadku ciągów numerację wyrazów można zaczynać od dowolnej liczby całkowitej. Jeśli rozpoczynamy od liczby k, to szereg oznaczamy symbolem $a_k + a_{k+1} + \ldots$ lub $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

Czytelnik może nieco zaskoczony tym, że rozpoczynamy od definicji i to nieco przydługiej. Otóż pojęcie sumy nieskończonej wymaga definicji: jaka ma być wartość sumy nieskończonej $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\ldots$?
Mogłaby być równa 0, bo $1-1+1-1+1-1+\ldots = (1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots$.
Mogłaby być równa 1, bo $1-1+1-1+1-1+\ldots = 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1+0+0+\ldots$.
A może nie 0 ani 1, lecz $\frac{1}{2}$, bo przecież sumujemy ciąg geometryczny o ilorazie -1, a jak to mówiono w szkole: *suma nieskończonego ciągu geometrycznego* $1+q+q^2+\ldots$ *jest równa* $\frac{1}{1-q}$. Faktem jest, że wielu absolwentów szkół średnich pamięta o tym, że

trzeba było założyć, że $|q| < 1$, ale duża część nie bardzo wie, dlaczego takie założenie trzeba uczynić.

To nie jest jedyny problem. Rozważmy sumę $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$. Niech $s'_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Ponieważ $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0$, więc zachodzą nierówności $s_1' > s_3' > s_5' > \ldots$ oraz $s'_2 < s'_4 < s'_6 < \ldots$, więc ciągi $\big(s'_{2n-1}\big)$ i (s'_{2n}) mają granice. Mamy $s'_{2n-1} - s'_{2n} = \frac{1}{2n}$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\big(s'_{2n-1} - s'_{2n}\big) = 0$. Wobec tego granice ciągów $\big(s'_{2n-1}\big)$ i (s'_{2n}) są równe i leżą między s'_2 oraz s'_1. Oznacza to, że ciąg (s'_n) jest zbieżny i że jego suma leży w przedziale $(\frac{1}{2}, 1)$. Możemy to zapisać tak: $\frac{1}{2} < \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} < 1$.

Teraz rozważmy szereg $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$. Występują w nim te same wyrazy (składniki) co w szeregu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, ale w innej kolejności: $-\frac{1}{2}$ na trzecim miejscu zamiast na drugim, $\frac{1}{3}$ — na drugim zamiast na trzecim, $-\frac{1}{4}$ – na szóstym zamiast na czwartym, $\frac{1}{5}$ — na czwartym zamiast na piątym, $\frac{1}{7}$ – na piątym zamiast na siódmym, itd. Na tzw. zdrowy rozum suma nie powinna zależeć od kolejności składników. Tak oczywiście jest w przypadku sumowania skończenie wielu liczb. Przekonamy się, że nie dotyczy to szeregów, czyli sum *nieskończenie* wielu składników. Rozważmy kolejne grupy trójskładnikowe: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}$, ... Pierwsza grupa kończy się składnikiem $-\frac{1}{2}$, druga — składnikiem $-\frac{1}{4}$, trzecia — składnikiem $-\frac{1}{6}$ itd. Widać więc, że ostatni składnik w m-tej grupie jest równy $-\frac{1}{2m}$. Bez trudu można stwierdzić, że poprzedni to $\frac{1}{2\cdot 2m-1} = \frac{1}{4m-1}$, a jeszcze poprzedni, czyli pierwszy w grupie równy jest $\frac{1}{4m-3}$. Mamy $\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n(4n-1)} + \frac{3}{4n(4n-3)}$. Wobec tego

$$\frac{1}{4n^2} = \frac{1+3}{4n\cdot 4n} < \frac{1}{4n(4n-1)} + \frac{3}{4n(4n-3)} < \frac{1+3}{4n\cdot n} = \frac{1}{n^2}$$

— korzystaliśmy z tego, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzą podwójne nierówności $4n > 4n-1 \geq 3n > n$ i $4n > 4n-3 \geq n$. Oznaczamy sumę n pierwszych wyrazów drugiego szeregu przez s''_n. Mamy oczywiście

$$0 < \tfrac{1}{4n^2} < s''_{3(n+1)} - s''_{3n} < \tfrac{1}{n^2}\,.$$

Wynika stąd, że ciąg (s''_{3n}) jest ściśle rosnący i dodatkowo

$$s''_{3n} < \tfrac{1}{1^2} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} < 1 + \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots \tfrac{1}{(n-1)\cdot n} =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} = \big(2 - \tfrac{1}{n}\big) < 2\,.$$

Ciąg $(s_{3n''})$ jest zatem ściśle rosnący i ograniczony, więc ma granicę skończoną. Jest ona większa niż $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ i mniejsza niż 2.

Ponieważ $s''_{3n+1}-s''_{3n}=\frac{1}{4n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ i $s''_{3n+2}-s''_{3n+1}=\frac{1}{4n+3}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, więc ciągi $\left(s''_{3n+1}\right)$ i $\left(s''_{3n+2}\right)$ mają granice i to takie same jak ciąg (s''_{3n}). Stąd bezpośrednio wynika, że ciąg (s''_n) jest zbieżny do tej wspólnej granicy swych trzech podciągów, które zawierają wszystkie jego wyrazy. Wykazaliśmy więc, że drugi szereg jest zbieżny.

Porównamy teraz sumy obu szeregów. Definiujemy $s'=1-\frac12+\frac13-\frac14+\dots$, $s''_{3n}=1+\frac13-\frac12+\frac15+\frac17-\frac14+\dots$. Zachodzą wzory $s'=\lim\limits_{n\to\infty}s'_{2n}$ i $s''=\lim\limits_{n\to\infty}s''_{3n}$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n-2}=$$
$$=\frac{1}{(4n-3)(4n-2)}-\frac{1}{(4n-1)(4n-2)}=\frac{2}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}>0\,.$$

Wobec tego

$$s''_{3n}-s'_{2n}=\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+\dots+\frac{2}{(4n-3)\cdot(4n-2)\cdot(4n-1)}\geq\frac{2}{1\cdot2\cdot3}=\frac13\,.$$

Stąd wynika, że ciąg $(s''_{3n}-s'_{2n})$ jest ściśle rosnący, zatem $s''-s'>s''_3-s'_3=\frac13$.

Okazało się więc, że zmiana kolejności wyrazów szeregu, czyli zmiana kolejności sumowania nieskończonego doprowadziła do zmiany sumy szeregu (suma urosła o więcej niż $\frac13$). Można zmienić kolejność wyrazów szeregu tak, by stał się on rozbieżny, np. by ciąg sum częściowych nie miał granicy albo by miał granicę nieskończoną. Wskazuje to wyraźnie na konieczność sprecyzowania pojęcia sumy nieskończonej — od tego zaczęliśmy ten rozdział — a następnie wyjaśnienia, jakie własności przysługują nieskończonym sumom, czyli szeregom, bo przecież wykazaliśmy już, że nie można automatycznie przepisywać sumom nieskończonym własności sum skończonych Tym się będziemy zajmować w dalszym ciągu tego rozdziału. Tematu nie wyczerpiemy, wykażemy jedynie kilka twierdzeń, które powinny pomóc zrozumieć, jak można postępować z szeregami w najprostszych sytuacjach.

Twierdzenie 2.2 (warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Dowód. Mamy $a_n=s_n-s_{n-1}$. Granica $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ jest skończona, bo szereg jest zbieżny, więc $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}s_n-\lim\limits_{n\to\infty}s_{n-1}=0$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenia tego odwrócić nie można, co pokazuje następny przykład.

Przykład 2.1 (szereg harmoniczny)

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac1n$. Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty}\frac1n=0$. Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej $k>1$ prawdziwa jest nierówność

$$\tfrac{1}{k+1}+\tfrac{1}{k+2}+\tfrac{1}{k+3}+\cdots+\tfrac{1}{k+k}>k\cdot\tfrac{1}{k+k}=\tfrac{1}{2}\,.$$

Stąd wynika, że

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=2\,,$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}=2\frac{1}{2}\,.$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>$

$>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\frac{1}{16}=3\,.$

Jeśli rozważymy sumę kończącą się na składniku $\frac{1}{32}$, czyli dopiszemy następną grupę ułamków, których sumę można oszacować z dołu przez $\frac{1}{2}$, to stwierdzimy, że suma ta jest większa niż $3+\frac{1}{2}$. Podobnie kończąc na $\frac{1}{64}$ otrzymujemy sumę większą niż 4, kończąc na $\frac{1}{128}$ otrzymujemy sumę większą niż $4+\frac{1}{2}$ itd. Widać więc, że ciąg sum częściowych, który jest rosnący, ma granicę $+\infty$. Wykazaliśmy więc, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, co oznacza, że szereg nie jest zbieżny.

Jasne jest, że to rozumowanie możemy znacznie skrócić, jeśli stwierdzimy, że z nierówności $s_{2k}-s_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{1}{2}$ wynika, że ciąg (s_n) sum częściowych szeregu $\sum\frac{1}{n}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego, zatem nie ma granicy skończonej, a to oznacza, że jest rozbieżny. ■

Twierdzenie 2.3 (o zbieżności szeregu geometrycznego)

Szereg geometryczny $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ jest rozbieżny, gdy $|q|\geq 1$. Jeśli $|q|<1$, to

$$1+q+q^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\tfrac{1}{1-q}\,.$$

Dowód. Jeśli $|q|\geq 1$, to ciąg (q^n) nie ma skończonej granicy, a jeśli ją ma (gdy $q=1$), to jest ona różna od 0. Jeśli $|q|<1$, to ponieważ $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}$. ■

Z udowodnionego twierdzenia wynika od razu nieco ogólniejszy wzór (rozpowszechniany w szkołach): $c+cq+cq^2+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}cq^n \overset{|q|<1}{=\!=\!=} \frac{c}{1-q}$.

Definicja 2.4 (rozwinięcia dziesiętnego)

Niech $x>0$ oznacza liczbę rzeczywistą. Niech $c_k,c_{k-1},c_{k-2},\ldots$ oznacza ciąg cyfr układu dziesiętnego, tzn. $c_n\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ dla $n=k,k-1,k-2,\ldots$ przy czym $c_k\neq 0$. Mówimy, że ciąg (c_n) jest ciągiem cyfr liczby x wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x = c_k 10^k + c_{k-1}10^{k-1} + c_{k-2}10^{k-2} + c_{k-3}10^{k-3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k-n}10^{k-n}$$

Przykład 2.2 Niech $k = 0$ i niech $c_j = 3$ dla $j = 0, -1, -2, \ldots$ i $c_j = 0$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots$. Wtedy

$$x = 3 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + \cdots = \tfrac{3}{1-\frac{1}{10}} = \tfrac{10}{3}\,.$$

Przykład 2.3 Jeśli $k = 0$, $c_0 = 1$, $0 = c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = \ldots$, to $x = 1$. Jeśli $k = -1$ i $9 = c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = \ldots$, to $x = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \cdots$ również odpowiada liczbie 1. ■

Widzimy więc, że w niektórych przypadkach jednej liczbie mogą odpowiadać dwa różne ciągi cyfr. Przekonamy się zaraz, że najwyżej dwa różne oraz że każdej liczbie dodatniej odpowiada co najmniej jeden ciąg cyfr.

Twierdzenie 2.5 (o przybliżeniach dziesiętnych)
Dla każdej liczby $x > 0$ istnieje liczba $k \in \mathbb{Z}$ i taki ciąg (cyfr) $c_k, c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots$, że $c_{k-j} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots$ oraz $c_k \neq 0$ i zachodzi równość

$$x = c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + c_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k-j}10^{k-j} \qquad (*).$$

Jeśli istnieje taka liczba naturalna j, że $10^j \cdot x \in \mathbb{N}$, to istnieją dokładnie dwa takie ciągi $c_k, c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots$ i $\tilde{c}_\kappa, \tilde{c}_{\kappa-1}, \tilde{c}_{\kappa-2}, \ldots$. Jeśli $k \neq \kappa$, to $|k-\kappa| = 1$; jeśli np. $k = \kappa+1$, to $c_k = 1$ i $0 = c_{k-1} = c_{k-2} = \ldots$ oraz $9 = \tilde{c}_\kappa = \tilde{c}_{\kappa-1} = \tilde{c}_{\kappa-2} = \ldots$. Jeśli $k = \kappa$, to istnieje liczba całkowita m taka, że $\tilde{c}_i = c_i$ dla $k \geq i > m$, $\tilde{c}_m = 1 + c_m$ (lub odwrotnie) i dla każdego $i < m$ zachodzą równości $c_m = 9$, $\tilde{c}_m = 0$.

Jeśli dla każdej liczby naturalnej j zachodzi $10^j \cdot x \notin \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jeden taki ciąg cyfr $c_k, c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots$, że $c_k > 0$, $c_{k-j} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ dla każdego $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, dla którego zachodzi równość (*).

Dowód. Niech $k \in \mathbb{Z}$ będzie taką liczbą, że $10^k \leq x < 10^{k+1}$. Z równości $\lim\limits_{n\to\infty} 10^n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$, wynika, że istnieją potęgi dziesiątki większe niż x, 10^{k+1} to najmniejsza z nich (w każdym ograniczonym z dołu zbiorze złożonym z liczb całkowitych znaleźć można najmniejszą). Niech $c_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ będzie największą cyfrą taką, że $c_k \cdot 10^k \leq x$. Zdefiniujemy cyfry $c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots$ przez indukcję. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już cyfry $c_k, c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots, c_i$ w taki sposób, że dla każdego $j \in \{0, 1, 2, \ldots, i\}$ zachodzi nierówność

$$0 \leq x - \left(c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_{k-j} \cdot 10^{k-j}\right) < 10^{k-j} = 10 \cdot 10^{k-j-1}\,.$$

Dla $j = i$ mamy więc $x - (c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_{k-i} \cdot 10^{k-i}) < 10 \cdot 10^{k-i-1}$.

Definiujemy c_{k-i-1} jako jedyną liczbę ze zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (więc cyfrę) taką, że

$$0 \le x - (c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_{k-i-1} \cdot 10^{k-i-1}) < 10^{k-i-1}\,.$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy ciąg $c_k, c_{k-1}, \ldots$ spełniający żądane warunki, bo oczywiście $\lim\limits_{i\to\infty} 10^{k-i-1} = 0$, a stąd i z definicji sumy szeregu wynika od razu, że $x = c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + c_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \cdots$

Teraz zajmiemy się jednoznacznością. Załóżmy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{k-n} \cdot 10^{k-n} = x = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{\kappa-n} \cdot 10^{\kappa-n}\,.$$

Załóżmy, że $k > \kappa$, przypadek $k < \kappa$ rozpatrzeć można w identyczny sposób. Wtedy

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{\kappa-n} \cdot 10^{\kappa-n} \le \sum_{n=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{\kappa-n} = \tfrac{9\cdot 10^{\kappa}}{1-\frac{1}{10}} = 10^{\kappa+1} \le$$

$$\le c_k \cdot 10^{\kappa+1} \le c_k \cdot 10^k \le \sum_{n=0}^{\infty} c_{k-n} \cdot 10^{k-n} = x\,.$$

Wynika stąd, że powyższe nierówności są równościami czyli, że:

$$9 = \tilde{c}_\kappa = \tilde{c}_{\kappa-1} = \tilde{c}_{\kappa-2} = \ldots,\ c_k = 1\,,\ k = \kappa+1\ \ 0 = c_{k-1} = c_{k-2=\ldots}$$

Teraz załóżmy, że $k = \kappa$. Załóżmy, że i jest najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną, dla której $c_{k-i} \ne \tilde{c}_{k-i}$. Przyjmijmy, dla ustalenia uwagi, że $c_{k-i} > \tilde{c}_{k-i}$. Mamy więc

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{k-n} \cdot 10^{k-n} = \tilde{c}_k \cdot 10^k + \tilde{c}_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + \tilde{c}_{k-i+1} \cdot 10^{k-i+1} + \tilde{c}_{k-i} \cdot 10^{k-i} +$$

$$+ \tilde{c}_{k-i-1} \cdot 10^{k-i-1} + \tilde{c}_{k-i-2} \cdot 10^{k-i-2} + \cdots \le$$

$$\le \tilde{c}_k \cdot 10^k + \tilde{c}_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + \tilde{c}_{k-i+1} \cdot 10^{k-i+1} + \tilde{c}_{k-i} \cdot 10^{k-i} +$$

$$+ 9 \cdot 10^{k-i-1} + 9 \cdot 10^{k-i-2} + \cdots =$$

$$= \tilde{c}_k \cdot 10^k + \tilde{c}_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + \tilde{c}_{k-i+1} \cdot 10^{k-i+1} + (\tilde{c}_{k-i}+1) \cdot 10^{k-i} =$$

$$= c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_{k-i+1} \cdot 10^{k-i+1} + (\tilde{c}_{k-i}+1) \cdot 10^{k-i} \le$$

$$\le c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_{k-i+1} \cdot 10^{k-i+1} + c_{k-i} \cdot 10^{k-i} \le$$

$$\le c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_{k-i+1} \cdot 10^{k-i+1} + c_{k-i} \cdot 10^{k-i} +$$

$$+ c_{k-i-1} \cdot 10^{k-i-1} + c_{k-i-2} \cdot 10^{k-i-2} + \cdots = x\,.$$

Jasne jest, że w rzeczywistości powyższe nierówności są równościami. Z tego stwierdzenia wynika, że:

$9 = \tilde{c}_{k-i-1} = \tilde{c}_{k-i-2} = \ldots,\ c_{k-i} = \tilde{c}_{\kappa-i}+1$ oraz $0 = c_{k-i-1} = c_{k-i-2} = \ldots$. Dowód został zakończony. ■

Pytanko: konstrukcja rozwinięcia dziesiętnego przedstawiona w dowodzie daje w przypadku liczby 30 wynik: $3 \cdot 10 + 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + \cdots$ czy może $2 \cdot 10 + 9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + \cdots$?

Studenci bez trudu zastąpią w tym twierdzeniu liczbę 10 przez dowolną liczbę $c \in \mathcal{N}(2)$ i otrzymają twierdzenie w wersji z wykładu. Tu zmieniłem po to, by ci z Państwa, którzy mieli kłopot w trakcie wykładu, mogli to obejrzeć w nieco prostszej wersji.

Warto jeszcze przeformułować warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu do granicy skończonej na przypadek szeregu liczbowego.

Twierdzenie 2.6 (warunek Cauchy'ego dla szeregu liczbowego)
Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny (czyli ma skończoną sumę) wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_k |a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}|<\varepsilon\,.$$
Dowód. Wynika to natychmiast z odpowiedniego twierdzenia dla ciągów zastosowanego do ciągu sum częściowych interesującego nas szeregu:
$$\varepsilon>|s_{n+k}-s_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}|\,,$$
dokładniej ciąg (s_n) zdefiniowany równością $s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$ ma skończoną granicę wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej ε istnieje taka liczba n_ε, że dla każdej liczby naturalnej $n>n_\varepsilon$ i każdej liczby naturalnej k zachodzi nierówność $\varepsilon>|s_{n+k}-s_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}|$. ■

Jak widać nic nowego w tym twierdzeniu nie ma poza oznaczeniami. Dodajmy jeszcze, że z formalnego punktu widzenia każdy ciąg (b_n) można potraktować jako szereg. Wystarczy przyjąć $a_0=b_0$ i $a_n=b_n-b_{n-1}$ dla $n=1,2,3,\ldots$. Przekonamy się jednak, że ta uwaga choć z formalnego punktu widzenia jest prawdziwa, to nie ma wielkiego zastosowania. Wyrazy wielu ciągów dane są jako sumy i wtedy teoria szeregów, której właśnie zaczęliśmy przyglądać się, ma zastosowanie, a w wielu innych przypadkach jej stosowanie nie ma większego sensu.

Dodajmy jeszcze, że powtarzając dowód zbieżności szeregu anharmonicznego, czyli szeregu $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ uzyskać można następujące

Twierdzenie 2.7 (kryterium Leibniza)
Jeśli ciąg (a_n) jest monotoniczny i zbieżny do 0, to szereg
$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$
jest zbieżny. ■

Możemy udowodnić to twierdzenie nieco inaczej, np. korzystając z warunku Cauchy'ego. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że ciąg (a_n) jest nierosnący, czyli że $a_0\geq a_1\geq a_2\geq\ldots$. Wtedy

$a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\cdots+a_{n+2k-1}-a_{n+2k}=$

$$= =(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + (\cdots + a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \geq 0$$

oraz

$a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \ldots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \leq a_{n+1}$,
zatem $|a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k-1} - a_{n+2k}| \leq a_{n+1}$.

W taki sam sposób wykazujemy, że

$$|a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k-1} - a_{n+2k} + a_{n+2k+1}| =$$
$$= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k-1} - a_{n+2k} + a_{n+2k+1} \leq a_{n+1} .$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$, więc warunek Cauchy'ego jest w tym przypadku spełniony, a to oznacza, że szereg jest zbieżny. W jednym z następnych wykładów uogólnimy to twierdzenie.