Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa

Lektura na sobotę i niedzielę a może inny dzień

Definicja 1 (podciągu)

Jeśli (a_n) jest ciągiem i $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (a_{n_m}), czyli ciąg $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ nazywamy podciągiem ciągu (a_n). ■

Ciągi $a_2, a_4, a_6, \ldots$, tzn. (a_{2n}), $a_1, a_3, a_9, a_{27}, \ldots$, tzn. $(a_{3^{n-1}})$ są podciągami ciągu (a_n). Ciąg $a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, \ldots$ podciągiem nie jest bo zmieniona została kolejność występowania wyrazów.

Powtórzę rozumowanie zaproponowane w końcu lekcji przez Szymona M.

Twierdzenie 2 (o wybieraniu podciągu monotonicznego)

Jeśli z ciągu (a_n) nie można wybrać podciągu niemalejącego, to można wybrać zeń podciąg malejący.

Dowód. Zaczniemy od wykazania, że jeśli z ciągu nie można wybrać podciągu ściśle rosnącego, to ten ciąg ma wyraz największy.

Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy a_1 nie jest największym wyrazem ciągu (a_n). Przyjmujemy $n_1 = 1$. Istnieje jakiś numer n_2 taki, że $a_{n_2} > a_{n_1}$.

Jeśli dla każdego $n > n_2$ zachodzi nierówność $a_n \leq a_{n_2}$, to największy z wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{n_2}$ jest największym wyrazem ciągu (a_n). Jeśli nie, to istnieje taka liczba naturalna $n_3 > n_2$, że $a_{n_3} > a_{n_2}$.

Jeśli dla każdego $n > n_3$ zachodzi nierówność $a_n \leq a_{n_3}$, to największy z wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{n_3}$ jest największym wyrazem ciągu (a_n). Jeśli nie, to istnieje taka liczba naturalna $n_4 > n_3$, że $a_{n_4} > a_{n_3}$.

Powtarzając to rozumowanie wykazujemy, że z ciągu (a_n) można wybrać podciąg ściśle rosnący, wbrew temu, co o tym ciągu założyliśmy. Oznacza to, że konstrukcji nie można kontynuować bez ograniczeń, a więc musimy natrafić na największy wyraz.

Załóżmy, że ciąg (a_n) nie zawiera ciągu niemalejącego. Niech a_{m_1} będzie największym wyrazem ciągu (a_n). Z ciągu $a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, a_{m_1+3}, \ldots$ nie można wybrać podciągu niemalejącego, bo byłby to pociąg niemalejący ciągu (a_n), a takiego nie ma. Wobec tego ciąg ten ma wyraz największy. Niech a_{m_2} będzie największym spośród wyrazów $a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, a_{m_1+3}, \ldots$ Niech a_{m_3} będzie największym spośród wyrazów ciągu $a_{m_2+1}, a_{m_2+2}, a_{m_2+3}, \ldots$ Analogicznie a_{m_4} jest największym spośród wyrazów $a_{m_3+1}, a_{m_3+2}, a_{m_3+3}, \ldots$ itd. Z określenia wynika natychmiast, że $a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq a_{m_3} \geq \ldots$. Oczywistym jest, że mogą wystąpić równości, ale jest też

jasne, że nieskończenie wiele razy pojawia się ostra nierówność (gdyby tak nie było, to możliwe byłoby wybranie podciągu stałego, który jest niemalejący i jednocześnie nierosnący). Dzięki tym nieskończenie wielu ostrym nierównościom wybieramy bez trudu podciąg ściśle malejący z ciągu $a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq a_{m_3} \geq \ldots$. Jest on podciągiem ciągu (a_n). ■

Twierdzenie 3 (Bolzano–Weierstrassa)
Jeśli ciąg (a_n) jest ograniczony, tzn. jeśli istnieje taka liczba M, że $|a_n| \leq M$ dla każdej liczby naturalnej n, to z ciągu (a_n) można wybrać podciąg zbieżny.

Dowód. Z twierdzenia o wybieraniu podciągu monotonicznego wynika, że z ciągu (a_n) można wybrać podciąg monotoniczny (a_{n_m}). Jest on ograniczony, więc ma granicę. Dowód został zakończony. ■

Niech $g = \lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m}$, oznaczenia jak w dowodzie. Oczywiście $|g| \leq M$.