Redukcje wielomianowe

Marcin Pilipczuk

Algorytmika @ Uniwersytet Warszawski

30 marca 2020

Plan na dziś

- Dziś o pokazywaniu, że czegoś się nie da zrobić.

Plan na dziś

- Dziś o pokazywaniu, że czegoś się nie da zrobić.
- ... tj. *nie istnieje algorytm, który rozwiązuje A w czasie T*

Plan na dziś

- Dziś o pokazywaniu, że czegoś się nie da zrobić.
- ... tj. *nie istnieje algorytm, który rozwiązuje A w czasie T*
- ... tj. *chyba nie istnieje algorytm, który rozwiązuje A w czasie T*

Plan na dziś

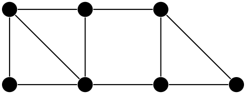
- Dziś o pokazywaniu, że czegoś się nie da zrobić.
- ... tj. *nie istnieje algorytm, który rozwiązuje A w czasie T*
- ... tj. *chyba nie istnieje algorytm, który rozwiązuje A w czasie T*
- ... tj. *mam całkiem niezłe argumenty, że chyba nie istnieje algorytm, który rozwiązuje A w czasie T*

Plan na dziś

- Dziś o pokazywaniu, że czegoś się nie da zrobić.
- ... tj. *nie istnieje algorytm, który rozwiązuje* A *w czasie* T
- ... tj. *chyba nie istnieje algorytm, który rozwiązuje* A *w czasie* T
- ... tj. *mam całkiem niezłe argumenty, że chyba nie istnieje algorytm, który rozwiązuje* A *w czasie* T
- **Dziś dowód przez autorytet**: 3-kolorowania nie da się rozwiązać w czasie wielomianowym od rozmiaru grafu.

3-kolorowanie

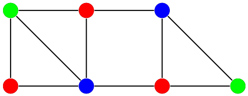
Wejście: graf nieskierowany G, $n := |V(G)|$



3-kolorowanie

3-kolorowanie

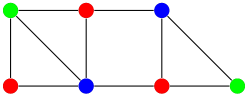
Wejście: graf nieskierowany G, $n := |V(G)|$
Wyjście: Czy istnieje 3-kolorowanie G, tj. funkcja $f : V(G) \to \{red, green, blue\}$ taka, że dla każdej $uv \in E(G)$ mamy $f(u) \neq f(v)$? TAK/NIE



3-kolorowanie

3-kolorowanie

Wejście: graf nieskierowany G, $n := |V(G)|$
Wyjście: Czy istnieje 3-kolorowanie G, tj. funkcja $f : V(G) \to \{red, green, blue\}$ taka, że dla każdej $uv \in E(G)$ mamy $f(u) \neq f(v)$? TAK/NIE

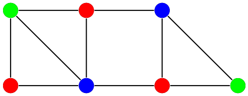


- Próbowano znaleźć szybki algorytm, np. $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n^4)$...

3-kolorowanie

3-kolorowanie

Wejście: graf nieskierowany G, $n := |V(G)|$
Wyjście: Czy istnieje 3-kolorowanie G, tj. funkcja $f : V(G) \to \{\mathit{red}, \mathit{green}, \mathit{blue}\}$ taka, że dla każdej $uv \in E(G)$ mamy $f(u) \neq f(v)$? TAK/NIE

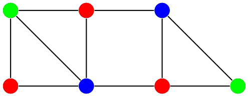


- Próbowano znaleźć szybki algorytm, np. $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n^4)$...
- Beigel, Eppstein: $\mathcal{O}(1.3289^n)$.

3-kolorowanie

3-kolorowanie

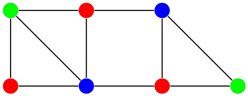
Wejście: graf nieskierowany G, $n := |V(G)|$
Wyjście: Czy istnieje 3-kolorowanie G, tj. funkcja $f : V(G) \to \{\mathit{red}, \mathit{green}, \mathit{blue}\}$ taka, że dla każdej $uv \in E(G)$ mamy $f(u) \neq f(v)$? TAK/NIE



- Próbowano znaleźć szybki algorytm, np. $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n^4)$...
- Beigel, Eppstein: $\mathcal{O}(1.3289^n)$.
- **Przez autorytet**: nie istnieje algorytm $\mathcal{A}$ i wielomian f taki, że $\mathcal{A}$, mając dany graf G, rozwiązuje problem 3-kolorowania G w czasie $f(|V(G)|)$.

3-kolorowanie

Wejście: graf nieskierowany G, $n := |V(G)|$
Wyjście: Czy istnieje 3-kolorowanie G, tj. funkcja $f : V(G) \to \{red, green, blue\}$ taka, że dla każdej $uv \in E(G)$ mamy $f(u) \neq f(v)$? TAK/NIE



- Próbowano znaleźć szybki algorytm, np. $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n^4)$...
- Beigel, Eppstein: $\mathcal{O}(1.3289^n)$.
- **Przez autorytet**: nie istnieje algorytm $\mathcal{A}$ i wielomian f taki, że $\mathcal{A}$, mając dany graf G, rozwiązuje problem 3-kolorowania G w czasie $f(|V(G)|)$.

„3-**kolorowania nie da się rozwiązać w czasie wielomianowym**”

Zbiór niezależny

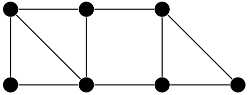
- A co z innymi problemami?

Zbiór niezależny

- A co z innymi problemami?

Zbiór niezależny

Wejście: graf G, liczba naturalna k.

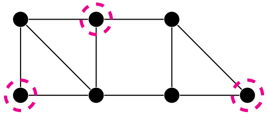


Zbiór niezależny

- A co z innymi problemami?

Zbiór niezależny

Wejście: graf G, liczba naturalna k.
Wyjście: czy istnieje zbiór $A \subseteq V(G)$, taki, że $|A| = k$ oraz nie istnieje $uv \in E(G)$, że $u, v \in A$?

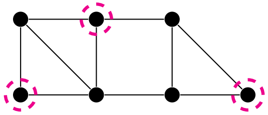


Zbiór niezależny

- A co z innymi problemami?

Zbiór niezależny

Wejście: graf G, liczba naturalna k.
Wyjście: czy istnieje zbiór $A \subseteq V(G)$, taki, że $|A| = k$ oraz nie istnieje $uv \in E(G)$, że $u, v \in A$?



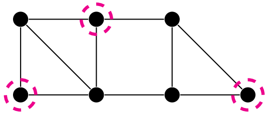
- A może ten problem jest trudniejszy?

Zbiór niezależny

- A co z innymi problemami?

Zbiór niezależny

Wejście: graf G, liczba naturalna k.
Wyjście: czy istnieje zbiór $A \subseteq V(G)$, taki, że $|A| = k$ oraz nie istnieje $uv \in E(G)$, że $u, v \in A$?



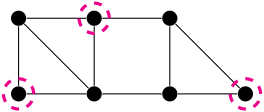
- A może ten problem jest trudniejszy?
- Też nie umiemy go szybko rozwiązać... ($\mathcal{O}(1.221^n)$).

Zbiór niezależny

- A co z innymi problemami?

Zbiór niezależny

Wejście: graf G, liczba naturalna k.
Wyjście: czy istnieje zbiór $A \subseteq V(G)$, taki, że $|A| = k$ oraz nie istnieje $uv \in E(G)$, że $u, v \in A$?



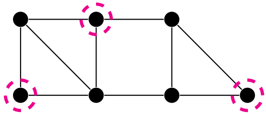
- A może ten problem jest trudniejszy?
- Też nie umiemy go szybko rozwiązać... ($\mathcal{O}(1.221^n)$).
- **Redukcje**: sposób na pokazanie, że jeden problem jest nieprostszy od drugiego.

Zbiór niezależny

- A co z innymi problemami?

Zbiór niezależny

Wejście: graf G, liczba naturalna k.
Wyjście: czy istnieje zbiór $A \subseteq V(G)$, taki, że $|A| = k$ oraz nie istnieje $uv \in E(G)$, że $u, v \in A$?



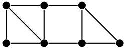
- A może ten problem jest trudniejszy?
- Też nie umiemy go szybko rozwiązać... ($\mathcal{O}(1.221^n)$).
- **Redukcje**: sposób na pokazanie, że jeden problem jest nieprostszy od drugiego.
- Następny slajd: zbiór niezależny jest nieprostszy od 3-kolorowania.

3-kolorowanie $\longrightarrow$ zbiór niezależny

$\boxed{\text{Bob}}$

3-kolorowanie $\longrightarrow$ zbiór niezależny

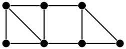
Bob



$n = |V(G)|$
$m = |E(G)|$

3-kolorowanie $\longrightarrow$ zbiór niezależny

Bob



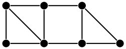
$n = |V(G)|$
$m = |E(G)|$

Alicja

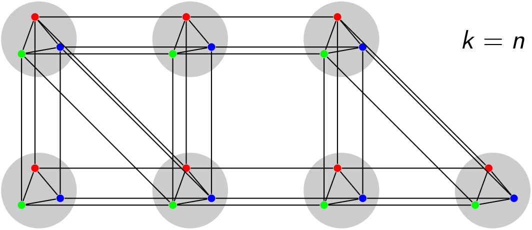
umie w zbiór niezależny

3-kolorowanie $\longrightarrow$ zbiór niezależny

Bob



$n = |V(G)|$
$m = |E(G)|$



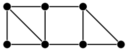
$k = n$

Alicja

umie w zbiór niezależny

3-kolorowanie $\longrightarrow$ zbiór niezależny

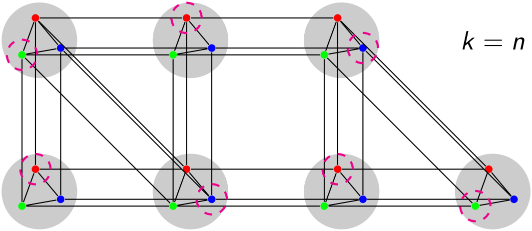
Bob



$n = |V(G)|$
$m = |E(G)|$

Alicja

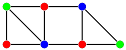
umie w zbiór niezależny



$k = n$

3-kolorowanie $\longrightarrow$ zbiór niezależny

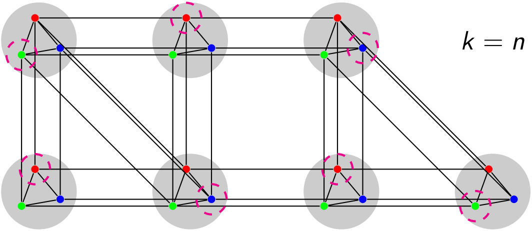
Bob



$n = |V(G)|$
$m = |E(G)|$

Alicja

umie w zbiór niezależny



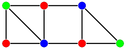
$k = n$

3-kolorowanie $\longrightarrow$ zbiór niezależny

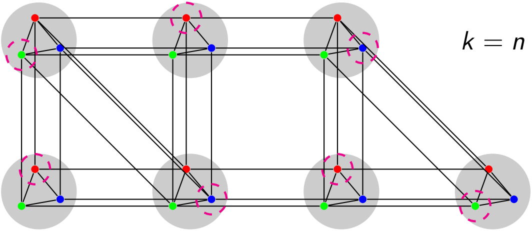
Bob   czas $\mathcal{O}(n+m)$

Alicja

umie w zbiór niezależny



$n = |V(G)|$
$m = |E(G)|$



$k = n$

$3n$ wierzchołków, $3n + 3m$ krawędzi

Redukcja wielomianowa

$\boxed{\text{Bob}}$

Redukcja wielomianowa

$\boxed{\text{Bob}}$

Egzemplarz problemu A

wielkości n

Redukcja wielomianowa

Bob

Egzemplarz problemu A

wielkości n

Alicja

umie w problem B

Redukcja wielomianowa

Bob

czas $\mathrm{poly}(n)$

Alicja

umie w problem B

Egzemplarz problemu A

wielkości n

Równoważny egzemplarz problemu B

wielkość $\mathrm{poly}(n)$

Redukcja wielomianowa

Bob czas $\mathrm{poly}(n)$

Alicja

umie w problem B

Egzemplarz problemu A

wielkości n

Równoważny egzemplarz problemu B

wielkość $\mathrm{poly}(n)$

rozwiązany!

Redukcja wielomianowa

Bob

czas $\mathrm{poly}(n)$

Alicja

umie w problem B

Egzemplarz problemu A

wielkości n

rozwiązany!

Równoważny egzemplarz problemu B

wielkość $\mathrm{poly}(n)$

rozwiązany!

Redukcja wielomianowa

Bob czas $\mathrm{poly}(n)$

Alicja

umie w problem B

Egzemplarz problemu A

wielkości n

rozwiązany!

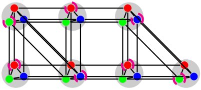
Równoważny egzemplarz problemu B

wielkość $\mathrm{poly}(n)$

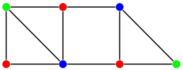
rozwiązany!

1. Konstrukcja Boba.
2. Bob $\Rightarrow$ Alicja.
3. Alicja $\Rightarrow$ Bob.

Dalsze redukcje



3-kolorowanie



zbiór niezależny

$G \mapsto \bar{G}$

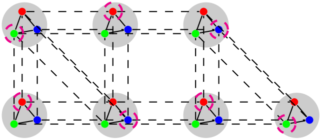
$\ell := n - k$

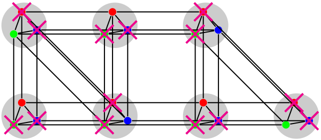
klika

Wejście: graf G, liczba naturalna k.
Wyjście: czy istnieje $A \subseteq V(G)$, $|A| = k$, $G[A]$ to klika?

pokrycie wierzchołkowe

Wejście: graf G, liczba naturalna ℓ.
Wyjście: czy istnieje $B \subseteq V(G)$, $|B| \leqslant \ell$, każda krawędź G ma co najmniej jeden koniec w B?





Spełnialność formuł d-CNF-SAT

Instancja

- n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Rozwiązanie

- wartościowanie $\alpha : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\top, \bot\}$

Spełnialność formuł d-CNF-SAT

Instancja

- n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- literały x_i oraz $\bar{x}_i$

Rozwiązanie

- wartościowanie $\alpha : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\top, \bot\}$
- $\alpha(\bar{x}_i) \neq \alpha(x_i)$

Spełnialność formuł d-CNF-SAT

Instancja

- n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- literały x_i oraz $\bar{x}_i$
- klauzula
  $C = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{d'})$, $d' \leqslant d$
  np. $(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_7)$

Rozwiązanie

- wartościowanie
  $\alpha : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\top, \bot\}$
- $\alpha(\bar{x}_i) \neq \alpha(x_i)$
- α spełnia $C \Leftrightarrow$
  $\exists \ell_i \in C \; \alpha(\ell_i) = \top$

Spełnialność formuł d-CNF-SAT

Instancja

- n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- literały x_i oraz $\bar{x}_i$
- klauzula
  $C = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{d'})$, $d' \leqslant d$
  np. $(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_7)$
- formuła — koniunkcja klauzul
  $\Phi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$

Rozwiązanie

- wartościowanie
  $\alpha : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\top, \bot\}$
- $\alpha(\bar{x}_i) \neq \alpha(x_i)$
- α spełnia $C \Leftrightarrow$
  $\exists \ell_i \in C \ \alpha(\ell_i) = \top$
- α spełnia $\Phi \Leftrightarrow$
  $\forall C_i \ \Phi$ spełnia C_i.

Spełnialność formuł d-CNF-SAT

Instancja

- n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- literały x_i oraz $\bar{x}_i$
- klauzula
  $C = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{d'})$, $d' \leqslant d$
  np. $(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_7)$
- formuła — koniunkcja klauzul
  $\Phi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$
- **Wejście**: Φ,
  (n zmiennych, m klauzul)

Rozwiązanie

- wartościowanie
  $\alpha : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\top, \bot\}$
- $\alpha(\bar{x}_i) \neq \alpha(x_i)$
- α spełnia $C \Leftrightarrow$
  $\exists \ell_i \in C \; \alpha(\ell_i) = \top$
- α spełnia $\Phi \Leftrightarrow$
  $\forall C_i \; \Phi \text{ spełnia } C_i$.
- **Wyjście**: czy istnieje α spełniające Φ?

Spełnialność formuł d-CNF-SAT

Instancja

- n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- literały x_i oraz $\bar{x}_i$
- klauzula $C = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{d'})$, $d' \leqslant d$ np. $(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_7)$
- formuła — koniunkcja klauzul $\Phi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$
- **Wejście**: Φ, (n zmiennych, m klauzul)

Rozwiązanie

- wartościowanie $\alpha : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\top, \bot\}$
- $\alpha(\bar{x}_i) \neq \alpha(x_i)$
- α spełnia $C \Leftrightarrow$ $\exists \ell_i \in C \; \alpha(\ell_i) = \top$
- α spełnia $\Phi \Leftrightarrow$ $\forall C_i \; \Phi \text{ spełnia } C_i$.
- **Wyjście**: czy istnieje α spełniające Φ?

Przykład:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4).$$

Spełnialność formuł d-CNF-SAT

Instancja

- n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- literały x_i oraz $\bar{x}_i$
- klauzula $C = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{d'})$, $d' \leqslant d$ np. $(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_7)$
- formuła — koniunkcja klauzul $\Phi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$
- **Wejście**: Φ, (n zmiennych, m klauzul)

Rozwiązanie

- wartościowanie $\alpha : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\top, \bot\}$
- $\alpha(\bar{x}_i) \neq \alpha(x_i)$
- α spełnia $C \Leftrightarrow$ $\exists \ell_i \in C \; \alpha(\ell_i) = \top$
- α spełnia $\Phi \Leftrightarrow$ $\forall C_i \; \Phi \text{ spełnia } C_i$.
- **Wyjście**: czy istnieje α spełniające Φ?

Przykład:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4).$$

$$\alpha(x_1) = \top, \alpha(x_2) = \bot, \alpha(x_3) = \bot, \alpha(x_4) = \bot$$

Spełnialność formuł d-CNF-SAT

Instancja

- n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- literały x_i oraz $\bar{x}_i$
- klauzula $C = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{d'})$, $d' \leqslant d$ np. $(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_7)$
- formuła — koniunkcja klauzul $\Phi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$
- **Wejście**: Φ, (n zmiennych, m klauzul)

Rozwiązanie

- wartościowanie $\alpha : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\top, \bot\}$
- $\alpha(\bar{x}_i) \neq \alpha(x_i)$
- α spełnia C $\Leftrightarrow$ $\exists \ell_i \in C\ \alpha(\ell_i) = \top$
- α spełnia Φ $\Leftrightarrow$ $\forall C_i\ \Phi$ spełnia C_i.
- **Wyjście**: czy istnieje α spełniające Φ?

Przykład:

$$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4).$$

$$\alpha(x_1) = \top, \alpha(x_2) = \bot, \alpha(x_3) = \bot, \alpha(x_4) = \bot$$

Trudność 3-CNF-SAT

Theorem (za moich czasów było na ASD)

Spełnialność formuł 2*-CNF-SAT można sprawdzać w czasie* $\mathcal{O}(n + m)$.

Trudność 3-CNF-SAT

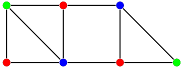
Theorem (za moich czasów było na ASD)

Spełnialność formuł 2-CNF-SAT można sprawdzać w czasie $\mathcal{O}(n+m)$.

Teraz:
Sprawdzanie spełnialności formuł 3-CNF-SAT jest nieprostsze od 3-kolorowania.

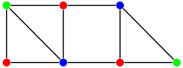
Trudność 3-CNF-SAT

3-**kolorowanie**



Trudność 3-CNF-SAT

3-**kolorowanie**

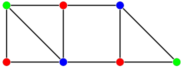


Spełnialność formuły 3-**CNF-SAT**

$$\text{wierzchołek } i \longrightarrow \text{ zmienne} \qquad x_i^r, x_i^g, x_i^b$$

Trudność 3-CNF-SAT

3-**kolorowanie**

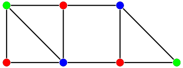


Spełnialność formuły 3-**CNF-SAT**

$$\text{wierzchołek } i \longrightarrow \text{ zmienne} \qquad x_i^r, x_i^g, x_i^b$$

$$\text{wierzchołek } i \longrightarrow \text{ klauzula} \qquad (x_i^r \vee x_i^g \vee x_i^b)$$

3-**kolorowanie**

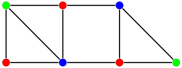


Spełnialność formuły 3-CNF-SAT

wierzchołek $i \longrightarrow$ zmienne	x_i^r, x_i^g, x_i^b
wierzchołek $i \longrightarrow$ klauzula	$(x_i^r \vee x_i^g \vee x_i^b)$
krawędź $ij \longrightarrow$ klauzule	$(\bar{x}_i^r \vee \bar{x}_j^r)$
	$(\bar{x}_i^g \vee \bar{x}_j^g)$
	$(\bar{x}_i^b \vee \bar{x}_j^b)$

Trudność 3-CNF-SAT

3-**kolorowanie**



Spełnialność formuły 3-**CNF-SAT**

$$\begin{array}{rcl} \text{wierzchołek } i & \longrightarrow & \text{zmienne} & x_i^r, x_i^g, x_i^b \\ \text{wierzchołek } i & \longrightarrow & \text{klauzula} & (x_i^r \vee x_i^g \vee x_i^b) \\ \text{krawędź } ij & \longrightarrow & \text{klauzule} & (\bar{x}_i^r \vee \bar{x}_j^r) \\ & & & (\bar{x}_i^g \vee \bar{x}_j^g) \\ & & & (\bar{x}_i^b \vee \bar{x}_j^b) \end{array}$$

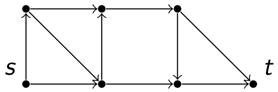
dla pedantów

$$\begin{array}{rcl} \text{wierzchołek } i & \longrightarrow & \text{klauzule} & (\bar{x}_i^r \vee \bar{x}_i^g) \\ & & & (\bar{x}_i^g \vee \bar{x}_i^b) \\ & & & (\bar{x}_i^b \vee \bar{x}_i^r) \end{array}$$

Ścieżka Hamiltona

Ścieżka Hamiltona

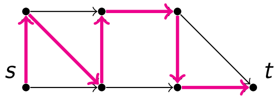
Wejście: graf skierowany G, wyróżnione $s, t \in V(G)$
Wyjście: czy istnieje ścieżka w G z końcami s i t, odwiedzająca każdy wierzchołek dokładnie raz.



Ścieżka Hamiltona

Ścieżka Hamiltona

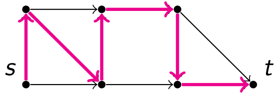
Wejście: graf skierowany G, wyróżnione $s, t \in V(G)$
Wyjście: czy istnieje ścieżka w G z końcami s i t, odwiedzająca każdy wierzchołek dokładnie raz.



Ścieżka Hamiltona

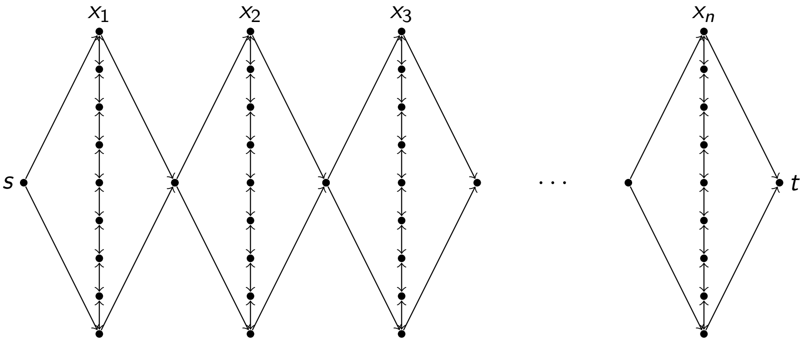
Ścieżka Hamiltona

Wejście: graf skierowany G, wyróżnione $s, t \in V(G)$
Wyjście: czy istnieje ścieżka w G z końcami s i t, odwiedzająca każdy wierzchołek dokładnie raz.

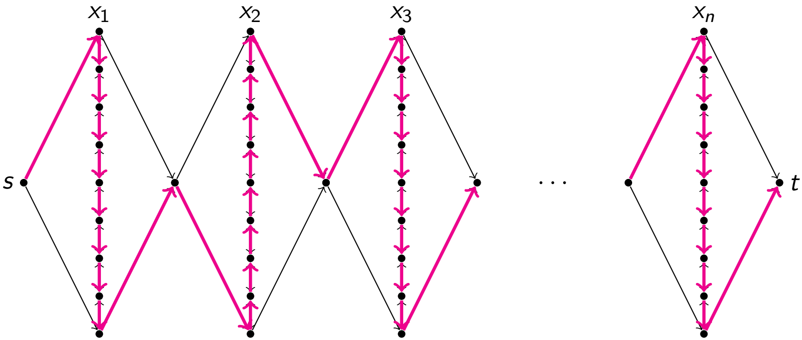


Teraz:
Ścieżka Hamiltona jest nieprostsza od spełnialności formuł 3-CNF-SAT.

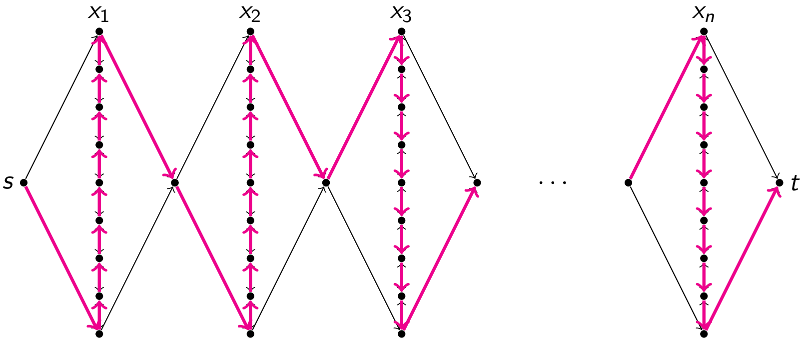
3-CNF-SAT ⟶ ścieżka Hamiltona



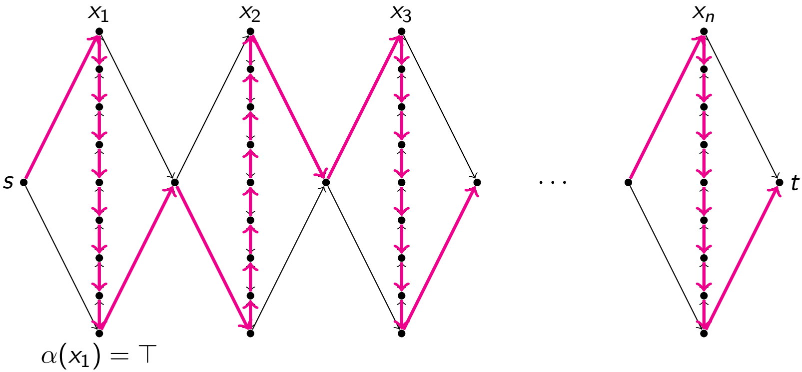
3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona



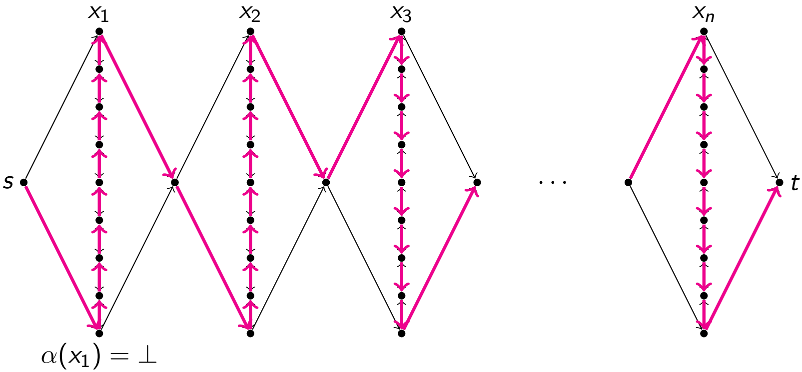
3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona



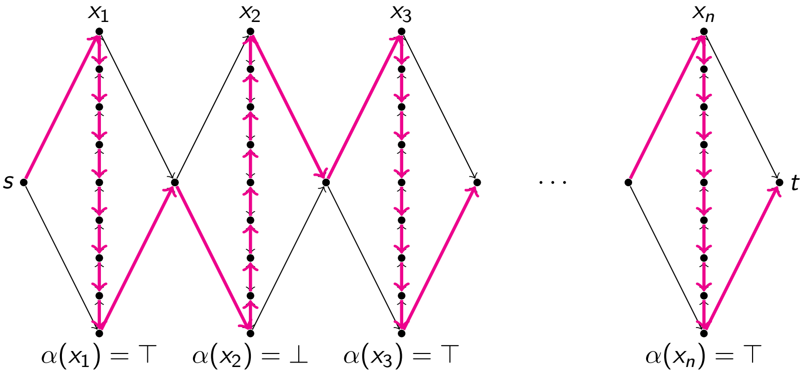
3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona



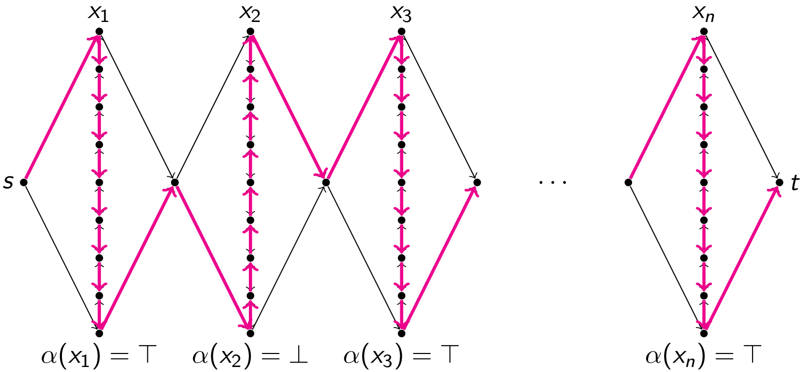
3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona



3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona

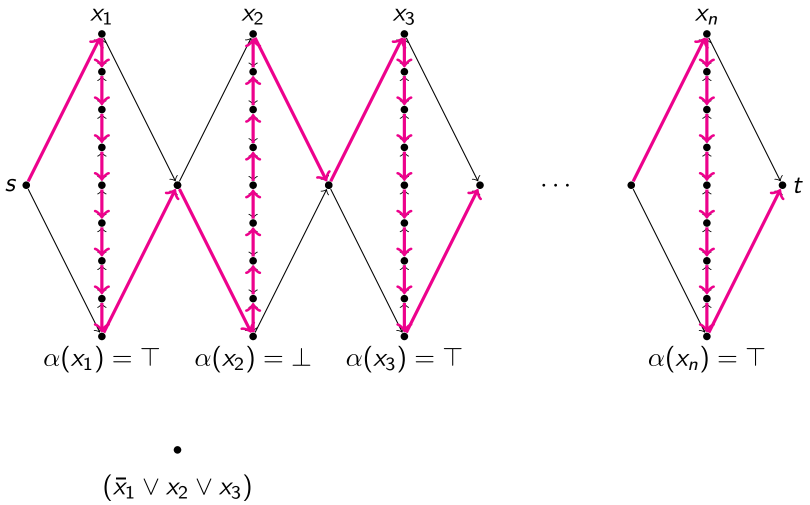


3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona

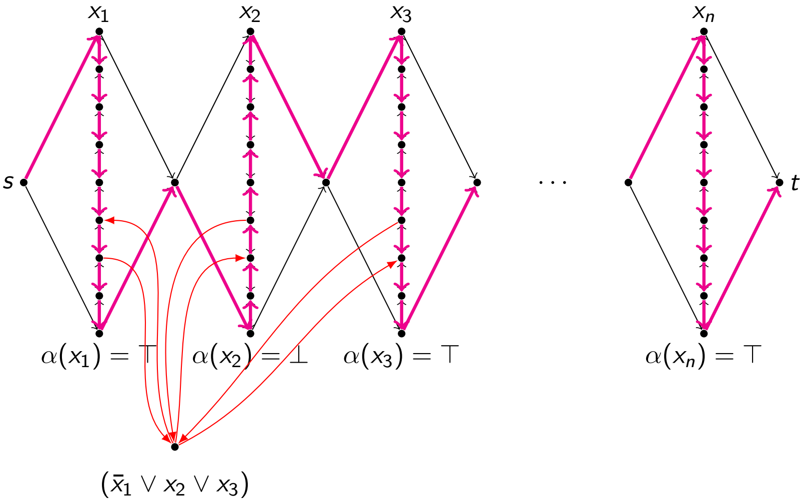


$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

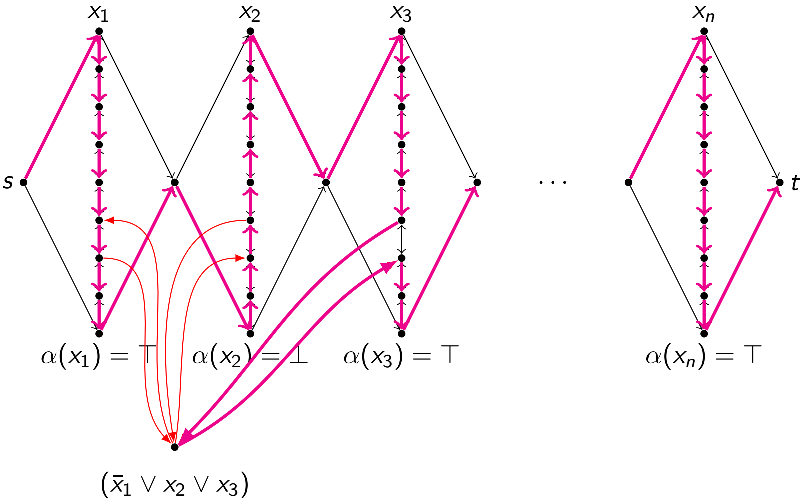
3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona



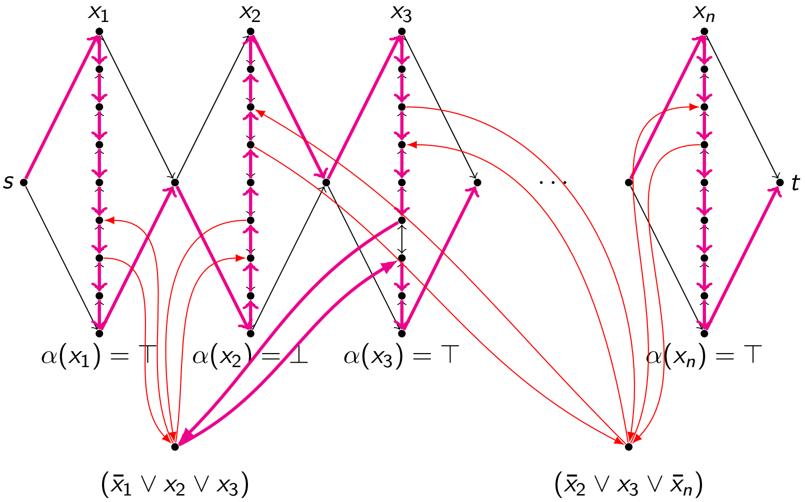
3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona

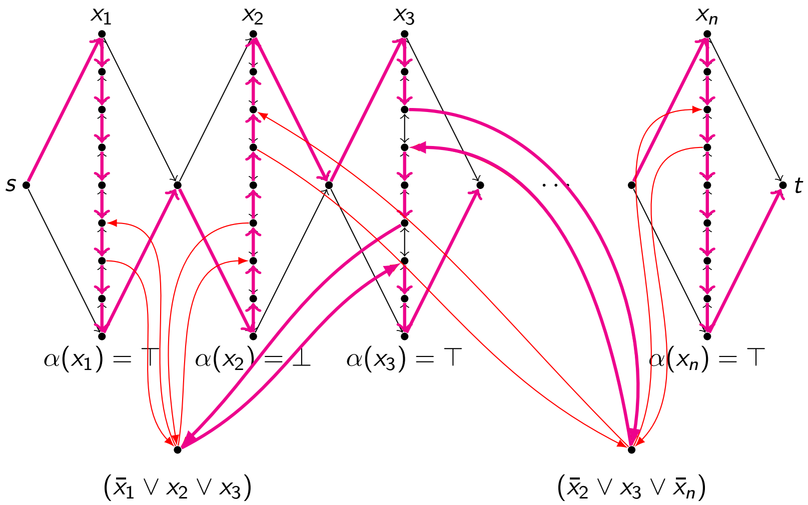


3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona

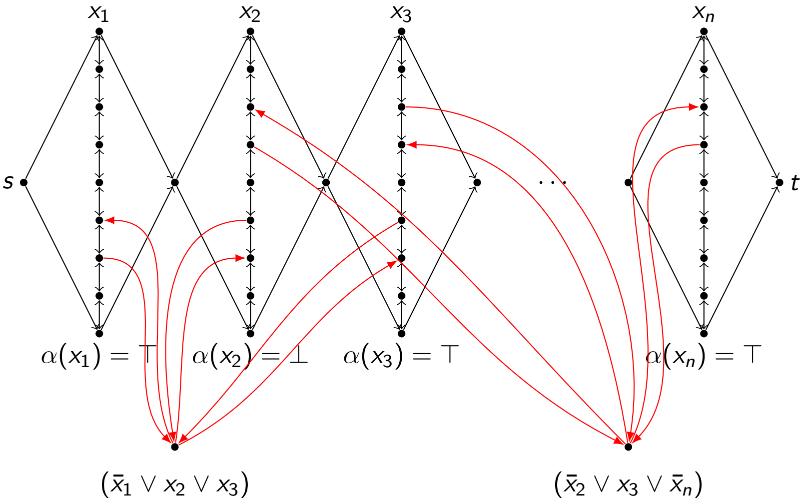


3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona

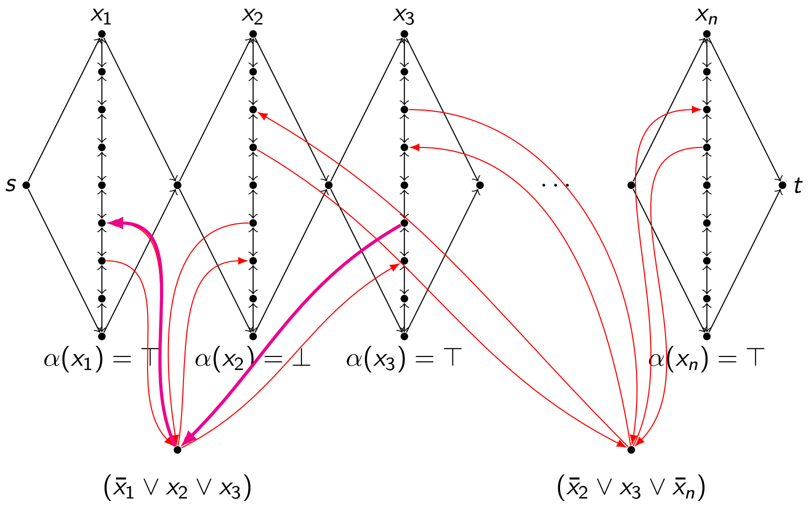



x_1
x_2
x_3
x_n
s
$\cdots$
t
$\alpha(x_1) = \top$
$\alpha(x_2) = \bot$
$\alpha(x_3) = \top$
$\alpha(x_n) = \top$
$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$
$(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_n)$

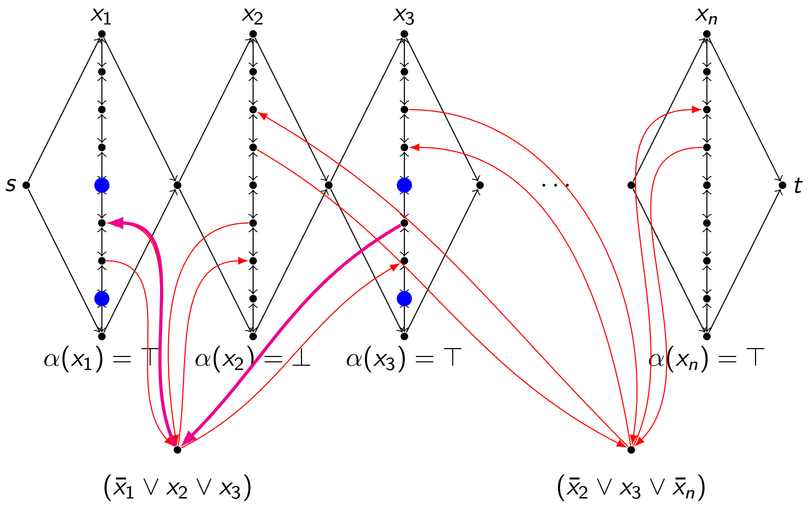
3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona



3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona



3-CNF-SAT $\longrightarrow$ ścieżka Hamiltona



Redukcje

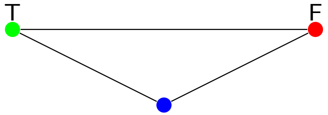
$$\begin{tikzcd}
\text{3-kolorowanie} \arrow[r] \arrow[d] & \text{3-CNF-SAT} \arrow[d] \\
\text{zbiór niezależny} \arrow[d] \arrow[dr] & \text{ścieżka Hamiltona} \\
\text{klika} & \text{pokrycie wierzchołkowe}
\end{tikzcd}$$

Redukcje

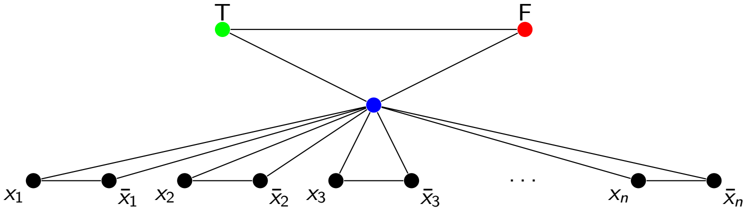
$$
\begin{tikzcd}
\text{3-kolorowanie} \arrow[r] \arrow[d] & \text{3-CNF-SAT} \arrow[l, bend right] \arrow[d] \\
\text{zbiór niezależny} \arrow[d] \arrow[dr] & \text{ścieżka Hamiltona} \\
\text{klika} & \text{pokrycie wierzchołkowe}
\end{tikzcd}
$$

Teraz:
3-kolorowanie jest nieprostsze od spełnialności formuł 3-CNF-SAT

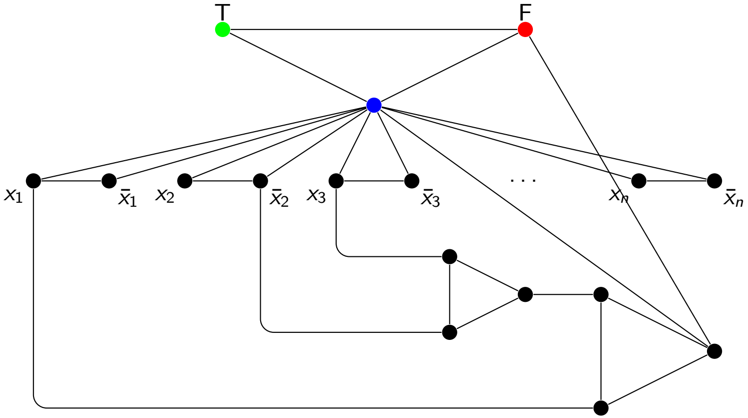
3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie

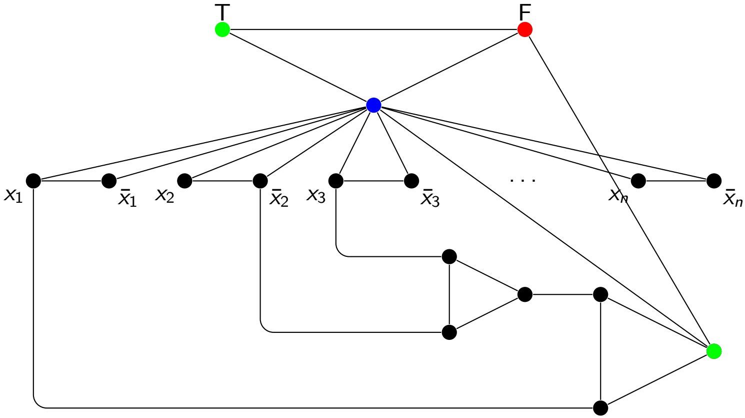


3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



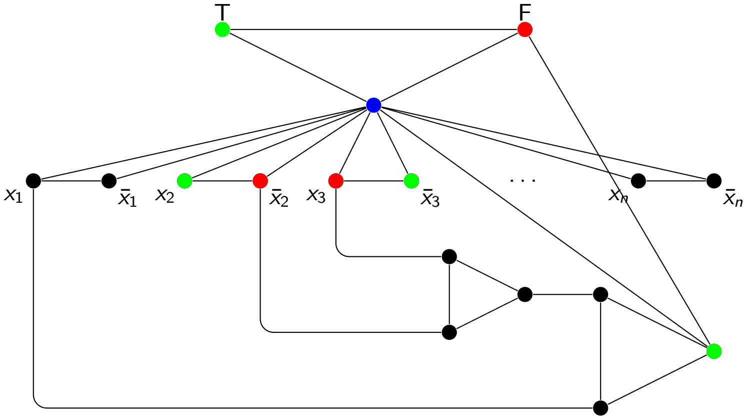
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



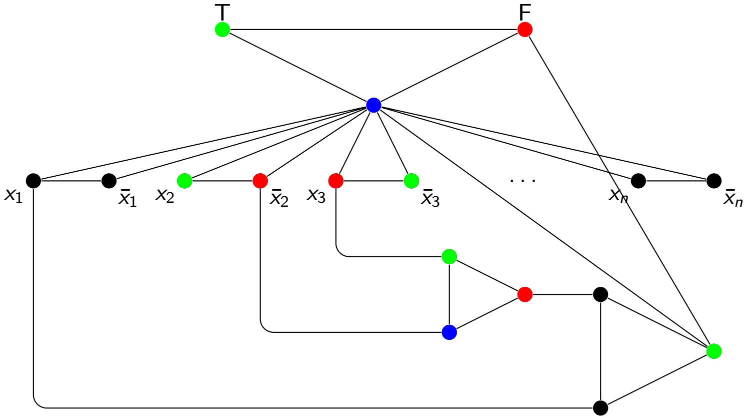
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



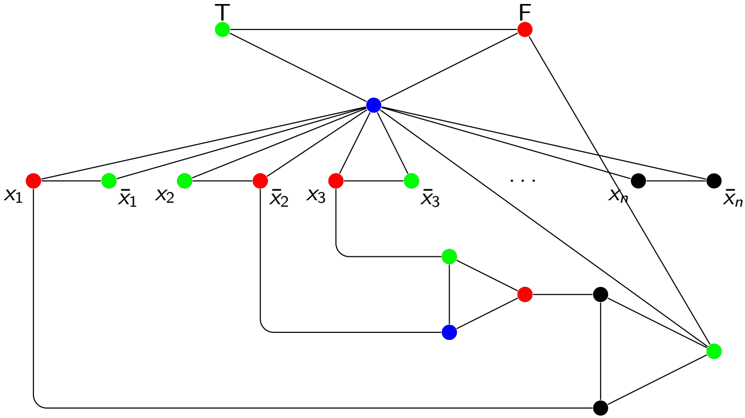
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



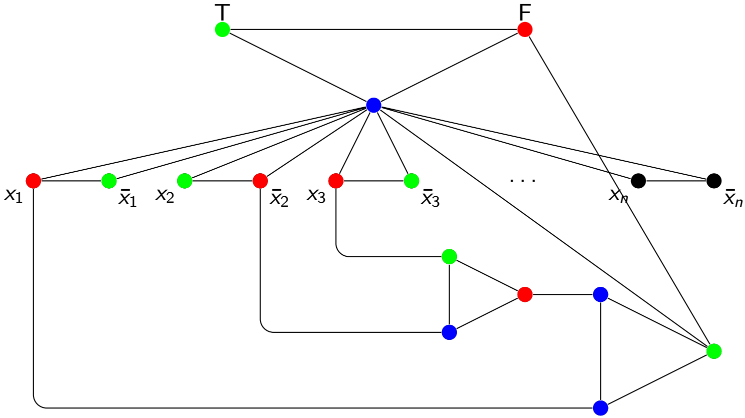
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



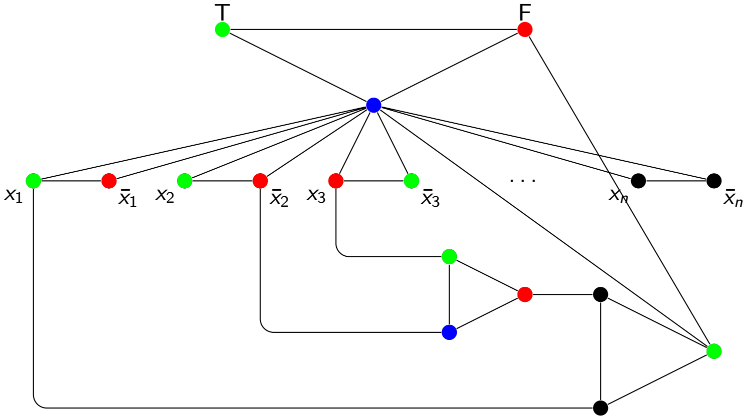
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



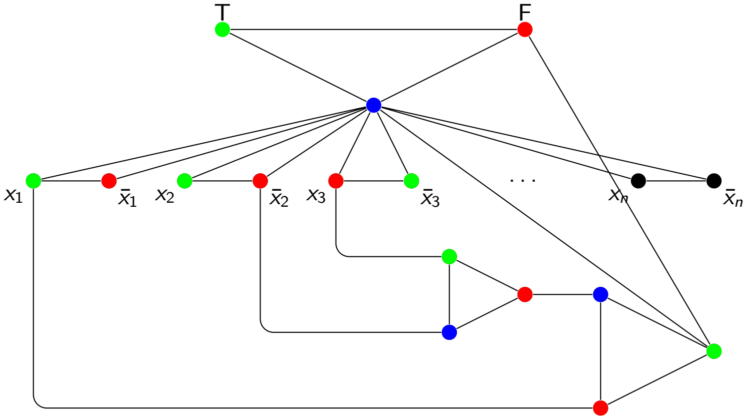
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



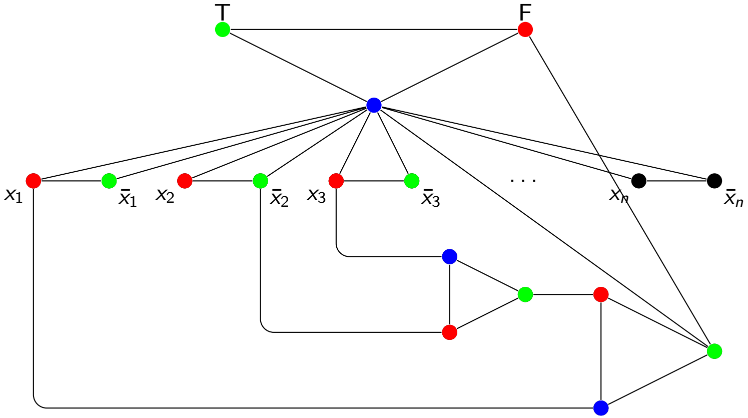
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



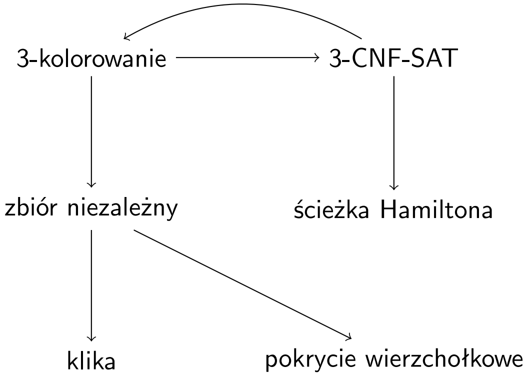
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

3-CNF-SAT $\longrightarrow$ 3-kolorowanie



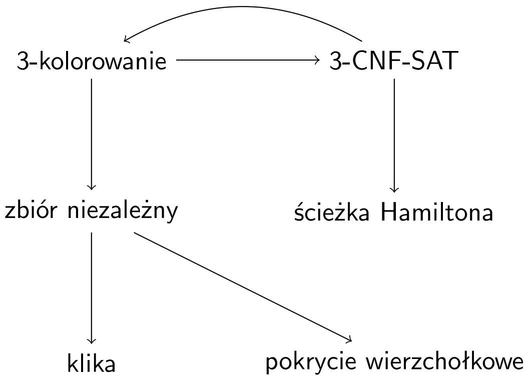
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

Podsumowanie



- Powyższe redukcje wielomianowe

Podsumowanie



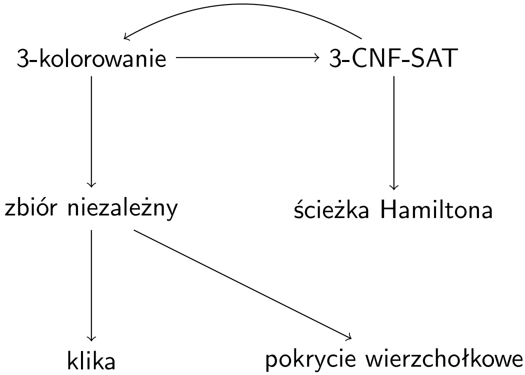
- Powyższe redukcje wielomianowe
- 3-kolorowanie trudne, bo tak

Podsumowanie

$$
\begin{tikzcd}
\text{3-kolorowanie} \arrow[r] \arrow[d] & \text{3-CNF-SAT} \arrow[l, bend right] \arrow[d] \\
\text{zbiór niezależny} \arrow[d] \arrow[dr] & \text{ścieżka Hamiltona} \\
\text{klika} & \text{pokrycie wierzchołkowe}
\end{tikzcd}
$$

- Powyższe redukcje wielomianowe
- 3-kolorowanie trudne, bo tak
- **Za tydzień**: formalizacja + argumenty, dlaczego trudne

Podsumowanie



- Powyższe redukcje wielomianowe
- 3-kolorowanie trudne, bo tak
- **Za tydzień**: formalizacja + argumenty, dlaczego trudne
- Dzisiejsza trudność nazywa się NP-trudność.