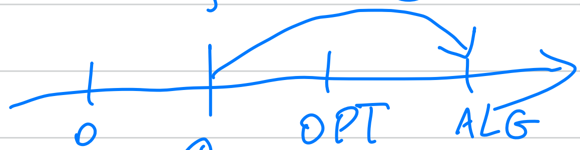
WYKŁAD: Programowanie liniowe w algorytmach aproksymacyjnych.

Ogr. dolne ?

Przypomnienie — **min**

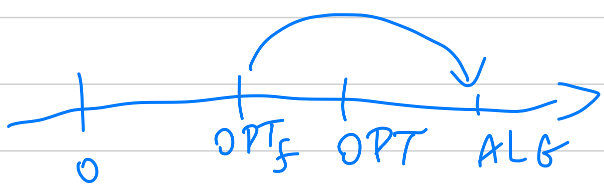


TSP — rozw: cykle Hamiltona → spójny, rozpinający

s ~~$\forall v \in V \ \deg_H v = 2$~~

Pomysł: problem → ILP $\xrightarrow{\text{rozwiązujemy}}$ LP

OPT $\qquad$ OPT $\geq$ OPT_f



Min Pokrycie Wierzchołkowe (wersja ważona)

$S \subseteq V : \forall uv \in E \ u \in S$ lub $v \in S$

We: $G = (V, E)$ $w: V \to \mathbb{R}$

Wy: znaleźć pokrycie wierzchołkowe S t.z. $\underbrace{\sum_{v \in S} w(s)}_{w(S)}$ minimalne [gdy $w(v) = 1 \ \forall v$ – „zwykłe"]

ILP: $\min \sum_{v \in V} w(v) x_v$ $\quad\to\quad$ LP: $\min \sum_{v \in V} w(v) x_v$

$\forall uv \in E \quad x_u + x_v \geq 1$ $\quad\quad$ $\forall uv \in E \quad x_u + x_v \geq 1$

$\forall v \quad x_v \geq 0, \quad x_v \in \mathbb{Z}$ $\quad\quad$ $\forall v \quad x_v \geq 0$

$OPT_f \leq OPT$

Algorytm

1. $\{x_v^*\}_{v \in V} \leftarrow$ opt. rozw. LP [czas wielom.]
2. for each $v \in V$ $\quad x_v \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{gdy } x_v^* \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$ $\quad w(S) = \sum_{v \in V} w(v) x_v \leq 2 \cdot \sum_{v \in V} w(v) x_v^* = OPT_f \leq OPT$

   $x_v \leq 2 x_v^*$
3. Zwróć $S = \{v : x_v = 1\}$

czas wielomianowy. $O(n^6)$

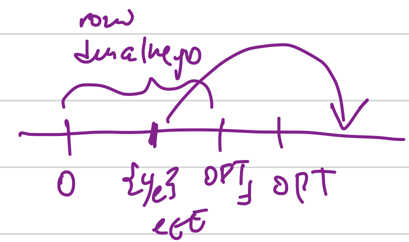
Tu to jest alg. 2-aproksymacyjny.

MIN POKRYCIE WIERZCHOŁKOWE - METODA PRYMALNO-DUALNA

$$\min \sum_v w(v) x_v \qquad\qquad \max \sum_e y_e$$

$$\forall uv \in E: \quad x_u + x_v \geq 1 \qquad\qquad \forall v \in V \quad \sum_{vw \in E} y_{vw} \leq w(v)$$

$$\forall v \quad x_v \geq 0 \qquad\qquad \forall e \quad y_e \geq 0$$



Algorytm

1. for $v \in V$ $x_v \leftarrow 0$
2. for $e \in E$ $y_e \leftarrow 0$
3. while $\exists uv$ $x_u = x_v = 0$:
   - Podnieś y_{uv} aż $\sum_{uw \in E} y_{uw} = w(u)$ (*) lub $\sum_{uv \in E} y_{uv} = w(v)$ (**).
   - if (*) $x_u \leftarrow 1$
   - if (**) $x_v \leftarrow 1$
4. $S = \{v \mid x_v = 1\}$.

Ćwiczenie Ten alg można zaimplementować w czasie liniowym.

$$w(S) \leq \sum_{v \in S} w(v) = \underbrace{\sum_{v \in S} \sum_{vw \in E} y_{vw}}_{\text{każde } y_e \text{ pojawia się} \leq 2\times} \leq 2 \sum_{e \in E} y_e \leq 2\, OPT_f \leq 2\, OPT$$

PROBLEM LASU STEINERA

We: $G=(V,E)$ $w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$S_1 \dots S_k \subseteq V$

Wy: Las $T \subseteq E$ t.ż. $\forall i$ S_i połączone, tzn. $T[S_i]$ spójne.

Algorytm pompowania balonów [Goemans Williamson '95]

1. $F \leftarrow \emptyset$ [las n drzew 1-wierzch.]
2. for $v \in V$ $r(v) \leftarrow 0$
3. while F nie jest rozw: $\exists i\ \exists x \in T\ y \notin T\ x,y \in S_i$

   for each T-aktywne drzewo w F

   równomiernie podnosimy $r(v)$ $\forall v \in T$

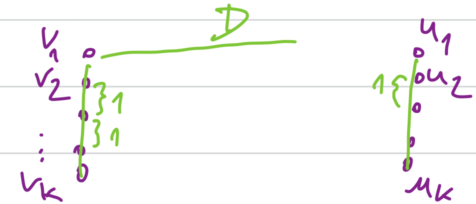
   aż balony dwóch wierzch. v, w z różnych drzew się dotkną

   $F \leftarrow F \cup \{vw\}$

4. Usuwamy z F niepotrzebne krawędzie tz. nie rozdzielają żadnego S_i.

Przykład

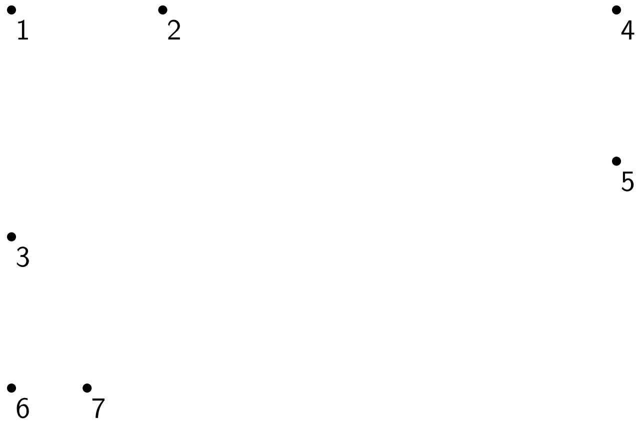
nie daje żadnej aproksymacji rozwiązanie osobno dla każdego S_i.



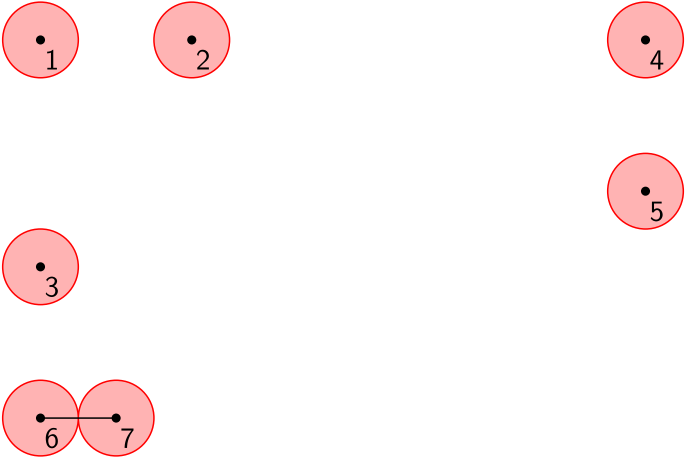
$S_i = \{v_i, u_i\}$

$\forall i$ $OPT_i = D \rightsquigarrow k \cdot D$

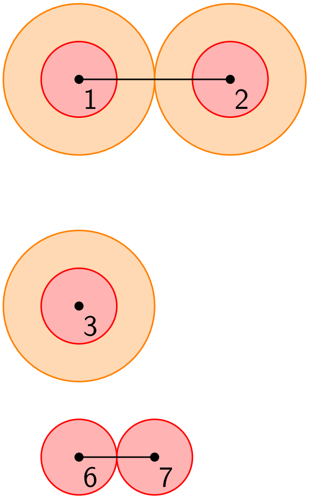
$OPT \leq D + 2(k-1)$



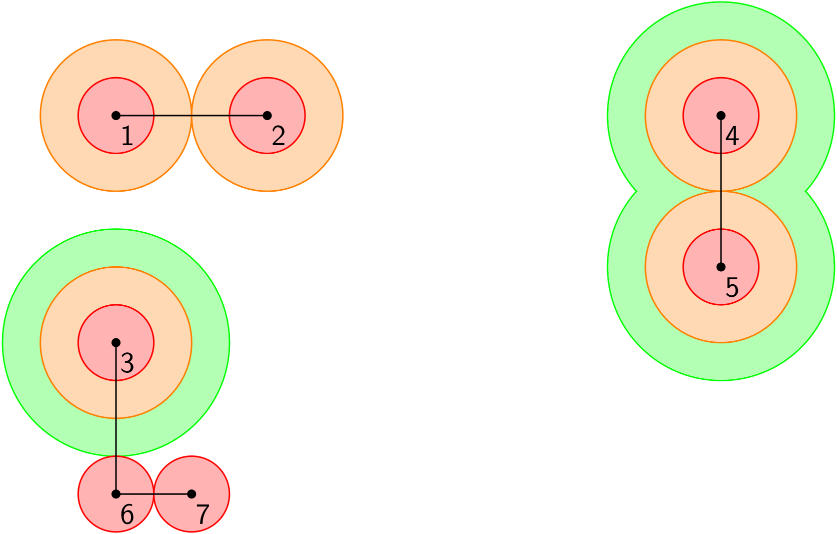
$$S_1 = \{1, 2\}$$
$$S_2 = \{3, 4, 5\}$$
$$S_3 = \{6, 7\}$$



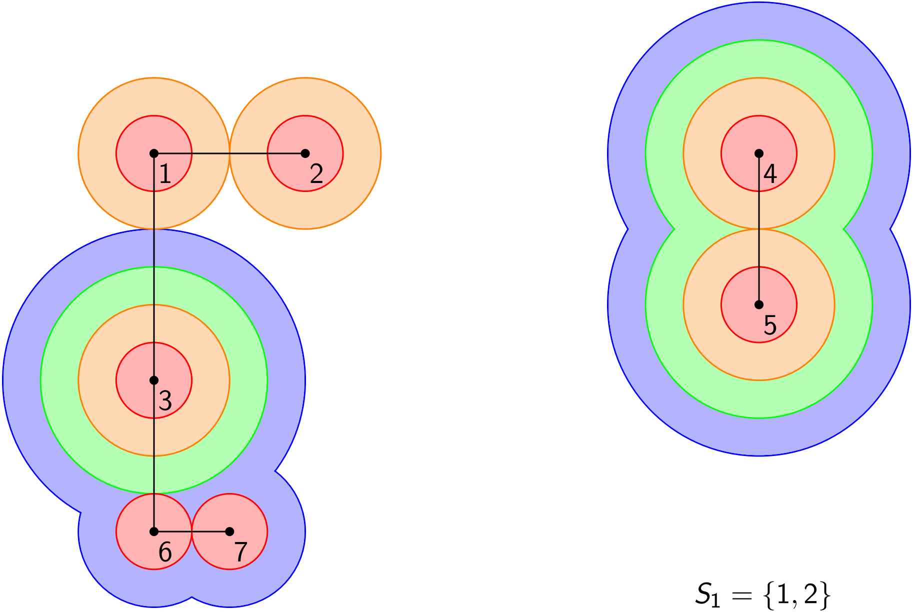
$S_1 = \{1, 2\}$
$S_2 = \{3, 4, 5\}$
$S_3 = \{6, 7\}$



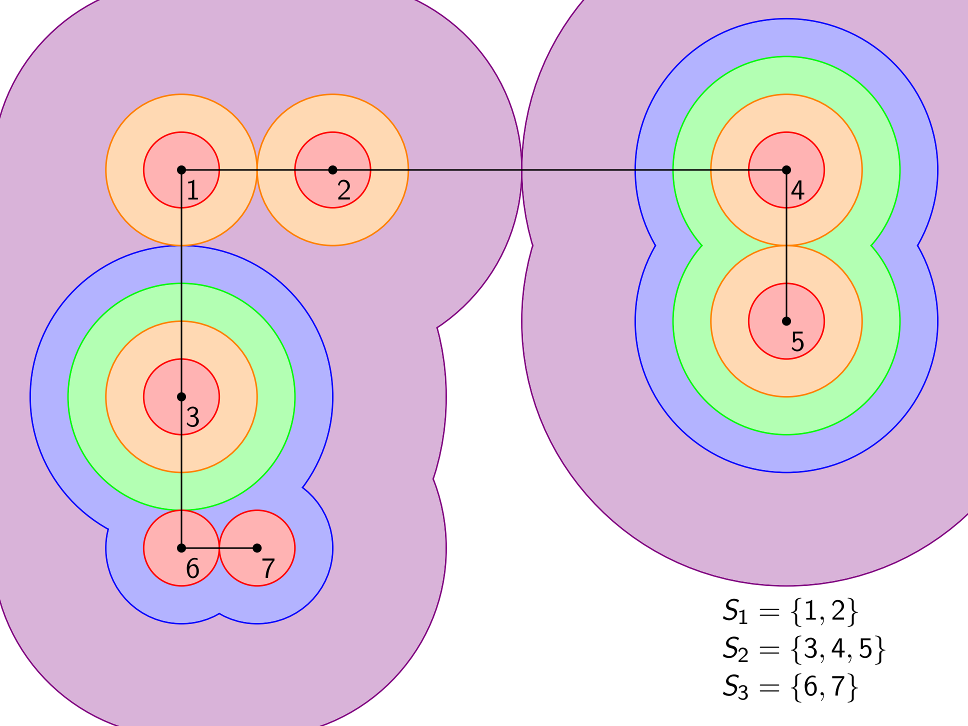
$S_1 = \{1, 2\}$
$S_2 = \{3, 4, 5\}$
$S_3 = \{6, 7\}$

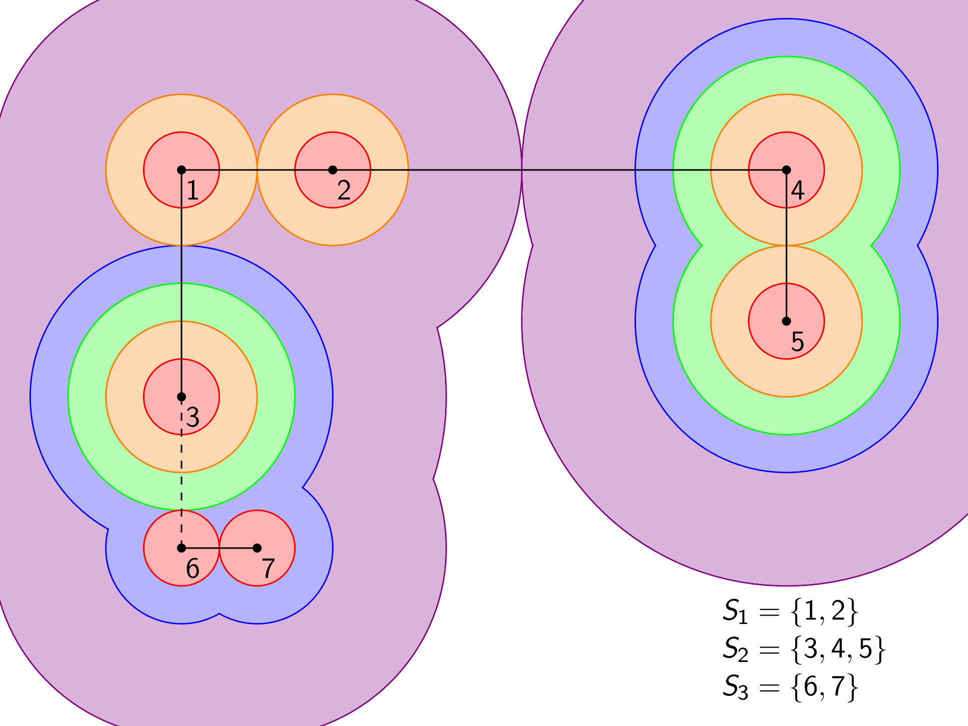


$S_1 = \{1, 2\}$
$S_2 = \{3, 4, 5\}$
$S_3 = \{6, 7\}$



$S_1 = \{1, 2\}$
$S_2 = \{3, 4, 5\}$
$S_3 = \{6, 7\}$


1
2
3
4
5
6
7
$S_1 = \{1, 2\}$
$S_2 = \{3, 4, 5\}$
$S_3 = \{6, 7\}$


1
2
3
4
5
6
7
$S_1 = \{1, 2\}$
$S_2 = \{3, 4, 5\}$
$S_3 = \{6, 7\}$

program liniowy

$$\min \sum_e w(e)\cdot x_e$$

$$f(S)=\begin{cases}1 & \text{gdy } \exists i\ \exists x\in S\ y\in\bar S\ \ x,y\in S_i\\ 0 & \text{wpp.}\end{cases}$$

$$\forall S\subseteq V \quad \sum_{e\in E(S,\bar S)} x_e \geq f(S)$$

$$\forall e \quad x_e \geq 0.$$

dualny

$$\max \sum_{S\subseteq V} f(S)\cdot y_S$$

$$\forall e\in E \quad \sum_{S:\, e\in(S,\bar S)} y_S \leq w(e)$$

$$\forall S\subseteq V \quad y_S \geq 0$$

Algorytm pompowania balonów

1. $F\leftarrow\emptyset$ [las n drzew 1-wierzch.] $x_e=0\ \forall e\in E$
2. for $v\in V$ $r(v)\leftarrow 0$ $\quad y_S=0\ \forall S\subseteq V$
3. while F nie jest rozw.: $\exists i\ \exists x\in T\ y\notin T\ x,y\in S_i$.
   - for each T-aktywne drzewo w F
     - równomiernie podnosimy $r(v)\ \forall v\in T$ → $y_{r(T)}$
     - aż balony dwóch wierzch. z różnych drzew v, w się dotkną → $\exists vw\in E \ \sum_{S:\, e\in(S,\bar S)} y_S = w(e)$
   - $F\leftarrow F\cup\{vw\}$
4. Usuwamy z F niepotrzebne krawędzie tz. nie rozdzielają żadnego S_i.

Analiza ?

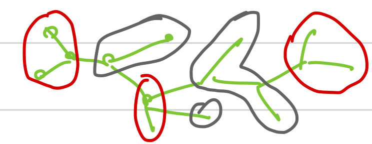
$$ALG=\sum_{e\in F} w(e) = \underbrace{\sum_{e\in F}\ \sum_{S:\, e\in\delta(S)} y_S}_{\sum_{S\subseteq V}\deg_F(S)\cdot y_S} \leq 2\cdot\sum_{S\subseteq V} y_S = 2OPT_f \leq 2OPT$$

$$\underbrace{\sum_{S\subseteq V}\deg_F(S)\cdot y_S}_{L} \leq \underbrace{2\sum_S y_S}_{R}$$

1 iteracja: $\forall$ aktywnego S y_S rośnie o ε.

$$\Delta L = \sum_{S\text{-akt.}} \varepsilon\cdot \deg_F(S), \quad \Delta R = 2\varepsilon\cdot\#akt$$

Las F:



$\forall S$-nieakt $\deg_F S \geq 2$ [$\leq 1 \to$ kraw. usunięta na końcu!]

ale $\sum_{S\in \text{wszystkie drzewa w } F} \deg_F(S) = 2(\#drzew-1) < 2\#drzew \Rightarrow \sum_{S\text{-akt}} \deg_F < 2\#akt$

$$\Delta L < \Delta R$$
$$\Downarrow$$
$$L < R.$$

Uwaga na boku: Ten PL można rozwiązać w czasie wielomianowym chociaż ma 2^n nierówności

$$\min \sum_e w(e) \cdot x_e$$

$$\forall S \subseteq V \quad \sum_{e \in E(S,\bar{S})} x_e \geqslant f(S)$$

$\forall e \quad x_e \geqslant 0.$

Tw Algorytm elipsoid rozwiązuje w czasie wielomianowym programy liniowe dane jako wyrocznia oddzielająca. $\Box$

algorytm t. że

We: punkt $x \in \mathbb{R}^n$

Wy: TAK gdy x jest rozw. dopuszcz.

wpp: nierówność której x nie spełnia

Wyrocznia oddzielająca dla naszego PL:

$\forall_i \forall_{s,t \in S_i}$ oblicz min s-t przekrój (S,T) w sieci nieskierowanej (V,E,c) $\quad c(e) = x_e$

wtedy $f(S) = 1$

- Jeśli $c(S,T) < 1 \rightsquigarrow \sum_{e \in E(S,\bar{S})} x_e = c(S,T) < 1$
- Jeśli $c(S,T) \geqslant 1 \Rightarrow \forall S' \sum_{e \in E(S',\bar{S'})} x_e = c(S',\bar{S'}) \geqslant 1.$

$\forall_i \forall_{s,t}$

t.ż. $f(S') = 1$