Wykład Algorytmy aproksymacyjne

Problemy optymalizacyjne

min drzewo rozpinające
max przepływ
PL

wielomianowe

min pokrycie wierzchołkowe
maksymalna klika
problem plecakowy

wersja decyzyjna
NP-zupełne

Problem min pokrycia wierzchołkowego

$S \subseteq V$ $\forall uv \in E$ $u \in S$ lub $v \in S$.

we: $G = (V, E)$

wy: min pokrycie wierzch. G

Algorytm

ze wzgl. na $\subseteq$

1. $M \leftarrow$ maksymalne skojarzenie w G
2. zwróć $S = V(M)$.

dopóki $\exists\, uv \in E$ $u \notin V(M)$ i $v \notin V(M)$
$M := M \cup \{uv\}$

czas $O(E)$

to jest pokrycie wierzch. bo: uv niedotknięta $u \notin S$ $v \notin S$ $\Rightarrow$ M nie maksymalne bo $M \cup \{uv\}$ większe.

koszt rozw opt.

Tw $|S| \leq 2\,OPT$

Dw. $OPT \geq M$ bo z każdej kraw M OPT bierze ≥ 1 koniec.

$|S| = 2|M| \leq 2\,OPT$ $\square$

SCHEMAT

wielomianowo

1. Znajdź ogr. dolne na OPT (obiekt który jest „lepszy" niż OPT)
2. przerabiamy na rozw. dopuszczalne

def Niech: P – problem optymalizacyjny (min)

Niech dla każdej instancji I problemu P OPT(I) koszt rozw. opt. — dodatni.

A – algorytm wielomianowy t.ż.

dla każdej inst. I

- zwraca rozw. dopuszczalne P
- $\frac{ALG(I)}{OPT(I)} \leq \alpha$ | dla max: $\frac{ALG(I)}{OPT(I)} \geq \alpha$

koszt zwracanego rozwiązania

to mówimy, że A jest α-aproksymacyjny

[$\alpha \geq 1$ bo $ALG \geq OPT$] MIN

[$\alpha \in (0,1]$ bo $ALG \leq OPT$] MAX

$\alpha(n) \geq 2^n$

Problem komiwojażera (TSP)

symetryczna: $w(x,y) = w(y,x)$

We: $w: V^2 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $|V| = n$

Wy: trasa – ciąg $v_0 v_1 \ldots v_{n-1}$ t.ż. $\sum_{i=0}^{n-1} w(v_i v_{i+1})$ jest najmniejsza możliwa. $[v_n = v_0]$

różne!

najlżejszy cykl Hamiltona

Tw: Nie istnieje $\alpha(n)$ obliczalna w czasie poly(n) taka żeby istniał algorytm $\alpha(n)$ aproksymacyjny dla TSP, o ile $P \neq NP$.

w gr. niesk.

Dowód: Pokażemy że jeśli α istnieje to HAMILTON CYCLE $\in P \Rightarrow P = NP$ ↯.

zał. że $\exists$ alg α-aproks.

$G = (V,E)$ – wejście do HAM CYCLE

$$w(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } uv \in E \\ \alpha(n) \cdot n & \text{w pp} \end{cases}$$

nasz alg. rozstrzyga czy G ma cykl H. w czasie wiel ↯

jeśli w G jest cykl Ham $\Rightarrow$ w TSP ist. rozw o koszcie n $\Rightarrow$ nasz alg zwróci rozw. o koszcie $\leq \alpha \cdot n$

jeśli NIE $\Rightarrow$ każde rozw. TSP ma koszt $> \alpha(n)\, n$ $\Rightarrow$ zwróci $> \alpha\, n$

METRYCZNY TSP

w jest metryką tzn. w spełnia nierówność trójkąta:

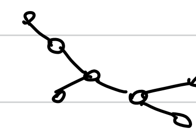
$$\forall x,y,z \in V \quad w(x,y) \leq w(x,z) + w(z,y).$$

OPT = najlżejszy (podgraf) cykl Hamiltona H

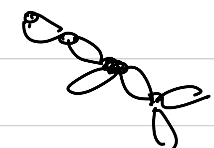
↳ podgraf rozpinający spójny

↳ $\forall v \in V \ \deg_H v = 2$.

Algorytm

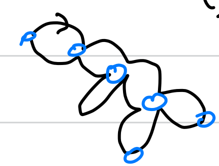


1. $T \leftarrow$ minimalne drzewo rozpinające [alg. Kruskala czas $O(E \log V)$]



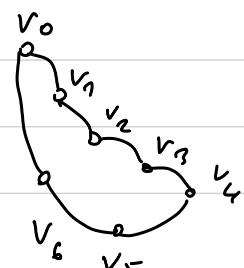
2. $T_2 \leftarrow$ powstaje z T przez podwojenie krawędzi (wszystkich)
3. $\mathcal{E} \leftarrow$ cykl Eulera w T_2 [czas liniowy]

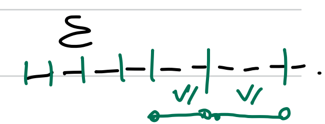
   ← marszruta zamknięta używająca wszystkich kraw.



4. v_0 - dowolny

   $\left.\begin{array}{l} v_1 \ldots v_{n-1} \text{ wierzch. pozostałe w kolejności} \\ \text{odwiedzenia idąc po } \mathcal{E} \text{ zaczynając w } v_0 \end{array}\right\} H$





Tw. To jest alg. 2-aproks.

Dw. $T \leq OPT$ bo gdy usunę z OPT dow. krawędź to dostanę ścieżkę rozp. czyli drzewo rozp.

$$w(H) \overset{\text{nier. trój}}{\leq} w(\mathcal{E}) = w(T_2) = 2 \cdot w(T) \leq 2 \cdot OPT \quad \square$$

METRYCZNY TSP

w jest metryką tzn. w spełnia nierówność trójkąta:

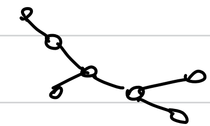
$$\forall x,y,z\in V \quad w(x,y) \le w(x,z)+w(z,y).$$

$G=(V,E)$ - graf pełny

Algorytm Christofidesa

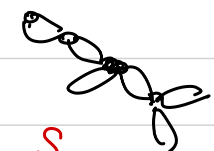
ist. algorytm wielomianowy.

1. $T \leftarrow$ minimalne drzewo rozpinające [alg. Kruskala czas $O(E\log V)$]



2'. $S \leftarrow$ zb. wierzch. nieparzystego stopnia w T [$2 \mid |S|$ z lematu o uśc. rąk]

2'' $M \leftarrow$ najtańsze doskonałe skojarzenie w podgrafie $(G[S], w|_{S^2})$ indukowanym przez S

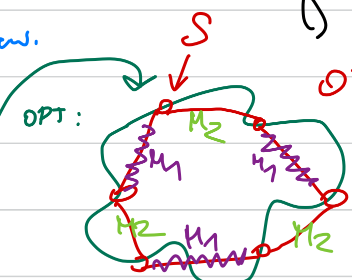


multigraf

3. $\mathcal{E} \leftarrow$ cykl Eulera w $T\cup M$ [czas liniowy]

$\leftarrow$ marszruta zamknięta używająca wszystkich krawędzi.

4. v_0 - dowolny
$v_1 \dots v_{n-1}$ wierzch. pozostałe w kolejności odwiedzenia idąc po $\mathcal{E}$ zaczynając w v_0 $\Big\}\ H$



OPT_S - skracany OPT idąc po S

$\Downarrow$ nier. tr.

$OPT_S \le OPT$.

Tw. To jest alg. $\frac{3}{2}$-aproks.

Dw. $T \le OPT$ bo gdy usunę z OPT dow. krawędź to dostanę ścieżkę rozp. czyli drzewo rozp.

$OPT_S = M_1 \cup M_2$

$$OPT \ge w(OPT_S) = \underset{\substack{\vee\!\shortparallel \\ w(M)}}{w(M_1)} + \underset{\substack{\vee\!\shortparallel \\ w(M)}}{w(M_2)} \ge 2w(M)$$

$$w(H) \overset{\text{nier. tr.}}{\le} w(\mathcal{E}) = w(T\cup M) = w(T)+w(M) \le OPT + \tfrac{1}{2}OPT \le \tfrac{3}{2}\cdot OPT \quad \square$$