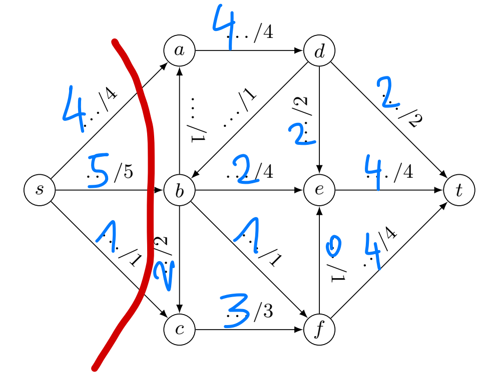
Imię i nazwisko .... WZORCÓWKA

Egzamin z algorytmiki 14.06.2022 – test (90 minut)

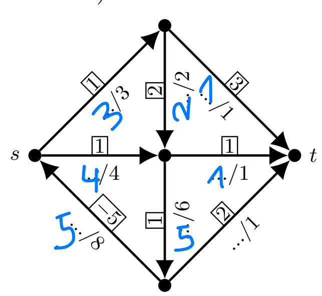
1. [**3 punkty**] Na poniższym rysunku napis .../c oznacza, że dana krawędź ma przepustowość c.
   - [**1 punkt**] Wpisz w puste miejsca na rysunku dowolny maksymalny (s,t)-przepływ.
   - [**1 punkt**] Zaznacz na rysunku dowolny minimalny (s,t)-przekrój.
   - [**1 punkt**] Podaj wartość przepływu, który zostanie znaleziony po pierwszej iteracji algorytmu Dinica. 8

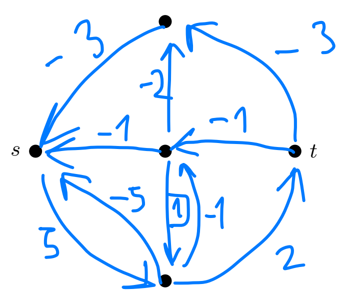


2. [**2 punkty**]

   Znajdź dowolny (s,t)-przepływ o wartości 2 i najmniejszym koszcie spośród przepływów o wartości 2 w poniższej sieci. (Na każdej krawędzi liczba w ramce oznacza koszt, a liczba po '/' przepustowość.)

   Narysuj sieć residualną po zakończeniu algorytmu, na każdej jej krawędzi podaj koszt residualny (bez przepustowości).





3. [**6 punktów**] Czy poniższe problemy są NP-trudne (o ile P$\neq$NP)? Odpowiedz TAK/NIE i krótko **uzasadnij**, podając redukcję (bez uzasadnienia równoważności) lub algorytm (bez dowodu poprawności).

   a) [**2 punkty**] Dana jest formuła logiczna ϕ w postaci CNF oraz liczba $k \in \mathbb{N}$. Czy istnieje wartościowanie zmiennych formuły ϕ takie, że co najmniej k klauzul jest spełnionych?

   TAK. Redukcja z SAT, dla formuły φ budujemy $(\varphi, k := n)$ liczba zmiennych

   b) [**2 punkty**] Jak w a), ale $k = m/2$, gdzie m jest liczbą klauzul.

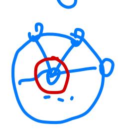
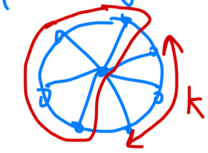
   NIE. Losowe wartościowanie daje E[#spełn. klauzul] $= m/2 \Rightarrow$ zawsze istnieje takie wartościowanie

   c) [**2 punkty**] Dany program liniowy L taki, że wszystkie wierzchołki wielościanu rozwiązań dopuszczalnych są półcałkowitoliczbowe, tzn. mają współrzędne postaci $k/2$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Czy istnieje całkowitoliczbowe wartościowanie spełniające?

   TAK. Redukcja z VERTEX COVER, Tworzymy liniowe jądro korzystając z twierdzenia Nemhausera-Trottera.

4. [**3 punkty**] *Kołem o n szprychach* nazywamy graf, który powstaje z cyklu n-wierzchołkowego przez dodanie wierzchołka i połączenie go krawędziami ze wszystkimi wierzchołkami cyklu. Jak duży przekrój może zwrócić w najgorszym przypadku algorytm Kargera uruchomiony na kole o 2022 szprychach? Odpowiedź krótko **uzasadnij**.

2023. Algorytm Kargera buduje przekrój (S,T) taki że G[S], G[T] - spójne

czyli są 2 sytuacje:  → 2022 ,  → $\boxed{K+2,\ K<2022}$, najwięcej dla K = 2021 → 2023.

5. **[4 punkty]** Poniższy program liniowy (po dodaniu warunków całkowitoliczbowości) modeluje problem szeregowania zadań. W tym problemie mamy dany zbiór zadań J, zbiór maszyn M, oraz liczby p_{ij}, dla każdego $i \in M$, $j \in J$ oznaczających czas wykonania zadania j na maszynie i. Należy przypisać zadania do maszyn tak, żeby zminimalizować czas zakończenia pracy. Podaj program dualny.

$$
\begin{array}{llll}
\min & t & & \\
& \sum_{i\in M} x_{ij} & = & 1 \quad \forall j \in J \\
& \sum_{j\in J} x_{ij} p_{ij} & \le & t \quad \forall i \in M \\
& x_{ij} & \ge & 0 \quad \forall i \in M, j \in J
\end{array}
$$

$\sum_j x_{ij}(-p_{ij}) + t \geq 0$

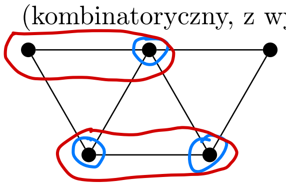
$\max \sum_{j\in J} y_j$

$\forall_{i\in M, j\in J} \quad y_j - p_{ij} z_i \geq 0$

$\sum_{i\in M} z_i = 1$

$\forall_{i\in M} \quad z_i \geq 0.$

6. **[2 punkty]** Jaki współczynnik aproksymacji osiąga algorytm aproksymacyjny dla pokrycia wierzchołkowego (kombinatoryczny, z wykładu), uruchomiony na poniższym grafie? Dlaczego?



OPT = 3,

algorytm wybiera maks (ze wzgl. na zawieranie) skojarzenie M i bierze ich końce. $|M|=2$ ($|M|=1 \Rightarrow$ nie max, $|M| \leq \frac{|V|}{2} = \frac{5}{2}$).

$\Rightarrow ALG = 2|M| = 4 \longrightarrow$ współczynnik $\frac{4}{3}$

7. **[4 punkty]** Niech $\mathcal{M}(G)$ oznacza matroid grafowy dla grafu nieskierowanego G. Scharakteryzuj rodzinę wszystkich grafów spójnych G, dla których matroid $\mathcal{M}(G)$ jest jednocześnie matroidem jednorodnym.

$\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ ma być postaci: $\exists k : \mathcal{F} = \{X \subseteq E : |X| \leq k\} = \{X \subseteq E :$ X nie ma cykli$\}$

Ponieważ G zawiera drzewo rozpinające (o n−1 krawędziach) $\Rightarrow k = n-1$ ($n = |V(G)|$).

$\Rightarrow$ każdy cykl C ma $> k$ krawędzi $\Rightarrow |C| = n$

Stąd G JEST DRZEWEM LUB POJEDYNCZYM CYKLEM.

8. **[2 punkty]** Dla pewnego problemu parametryzowanego (ozn. rozmiar instancji przez n, parametr przez k) zaproponowano algorytm działający w czasie $f(n,k)$, który zwraca równoważną instancję o rozmiarze $g(n,k)$. W każdej z poniższych opcji zaznacz, czy jest to algorytm kernelizacyjny.

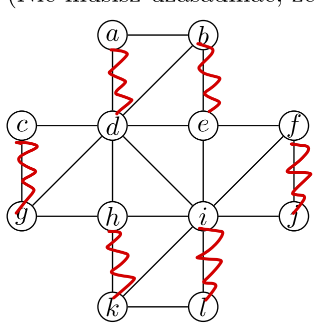
a) $f(n,k) = n^2$, $g(n,k) = 2^n k$ NIE

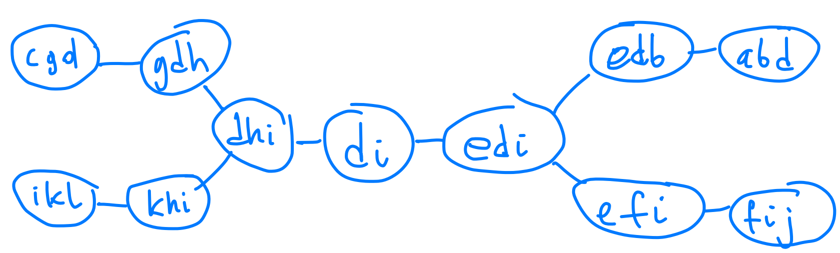
b) $f(n,k) = n^3$, $g(n,k) = 2^k n$ NIE

c) $f(n,k) = 2^k n$, $g(n,k) = k^2$ NIE

d) $f(n,k) = nk$, $g(n,k) = 2^{2^k}$ TAK

9. **[3 punkty]** Jaka jest szerokość drzewiasta poniższego grafu? Wskaż odpowiednią dekompozycję drzewiastą. (Nie musisz uzasadniać, że szerokość nie może być mniejsza.)





szerokość 2.

10. **[1 punkt]** W grafie z zadania 9 zaznacz dowolne rozwiązanie, które może zwrócić algorytm Edmondsa.