Algorytmika, egzamin zerowy, część zadaniowa, czerwiec 2022

Zadanie 1 [5 punktów] Dany graf skierowany $G = (V, E)$, funkcja wagowa $w : E \to \mathbb{N}$ oraz wierzchołek r. Należy znaleźć podzbiór krawędzi $S \subseteq E$ o minimalnej wadze taki, że w grafie (V, S) dla każdego wierzchołka $v \in V$ istnieje ścieżka (skierowana) od r do v. Zaproponuj algorytm wielomianowy (stopień wielomianu nie ma wpływu na punktację).

Zadanie 2 [15 punktów] Dany graf nieskierowany $G = (V, E)$ i funkcja przepustowości $c : E \to \mathbb{N}$. Ponadto danych jest k żądań, gdzie dla $i = 1, \dots, k$ żądanie i-te jest opisane przez parę wierzchołków (s_i, t_i), zysk $p(i) \in \mathbb{N}$ oraz koszt $f(i) \in \mathbb{N}$.

Należy znaleźć taki zbiór żądań $S \subseteq \{1, \dots, k\}$, że:

- dla każdego $j \in S$ istnieje ścieżka P_j od s_j do t_j,
- dla każdej krawędzi $e \in E$ sumaryczny koszt żądań j, których wybrane ścieżki P_j przechodzą przez e nie przekracza $c(e)$, tzn.

$$\sum_{j \in S : e \in P_j} f(j) \leq c(e)$$

- sumaryczny zysk na zbiorze S, t.j. $\sum_{j \in S} p(j)$ jest największy możliwy.

Rozstrzygnij czy ten problem jest NP-trudny[1] czy w P, dla każdego z poniższych wariantów:

a) bez dodatkowych założeń,

b) gdy G jest pojedynczą ścieżką,

c) gdy G jest pojedynczą ścieżką oraz $f(i) = 1$ dla każdego $i = 1, \dots, k$,

d) gdy G jest pojedynczą ścieżką oraz $f(i) = p(i) = 1$ dla każdego $i = 1, \dots, k$.

Wskazówka 1: można użyć programowania liniowego (ale nie powiemy w którym punkcie).

Zadanie 3 [10 punktów] Dane jest n zadań, które uruchamiamy na pojedynczej maszynie. Każde zadanie j jest określone przez 4 liczby naturalne: zysk $w(j)$, koszt $c(j)$, początek $b(j)$ i koniec $e(j)$, gdzie $1 \leq b(j) \leq e(j) \leq T$. Znaczenie tych liczb jest następujące: jeśli uruchomimy zadanie j, to będzie ono się wykonywać w przedziale czasu $[b(j), e(j)]$ i w całym tym przedziale będzie zużywać $c(j)$ zasobów maszyny. Maszyna ma przepustowość B. Szeregowaniem nazywamy pozbiór S zadań, taki, że dla każdej chwili $t = 1, \dots, T$ mamy wystarczająco dużo zasobów do wykonania zadań z S, tzn. całkowity koszt zadań ze zbioru $\{j \in S : b(j) \leq t \leq e(j)\}$ nie przekracza B. Należy znaleźć szeregowanie, które maksymalizuje całkowity zysk.

a) Zaproponuj algorytm $O(1)$-aproksymacyjny dla tego problemu w przypadku, gdy wszystkie zadania wykonują się tak samo długo.

b) Zaproponuj algorytm $O(\log T)$-aproksymacyjny dla problemu bez dodatkowych założeń.

---

[1] Formalnie, NP-trudność definiowaliśmy dla problemów decyzyjnych. Na potrzeby tego zadania, przyjmijmy, że problem optymalizacyjny jest NP-trudny gdy jego rozwiązanie w czasie wielomianowym implikuje rozwiązanie w czasie wielomianowym pewnego decyzyjnego problemu NP-trudnego.