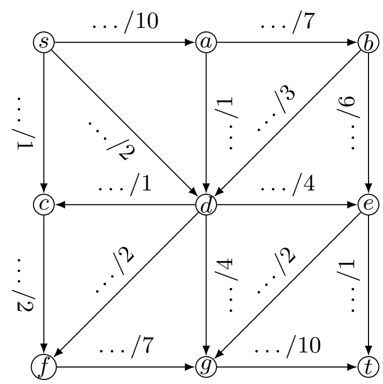
Imię i nazwisko ....

Egzamin z algorytmiki 18.06.2021 – test (90 minut)

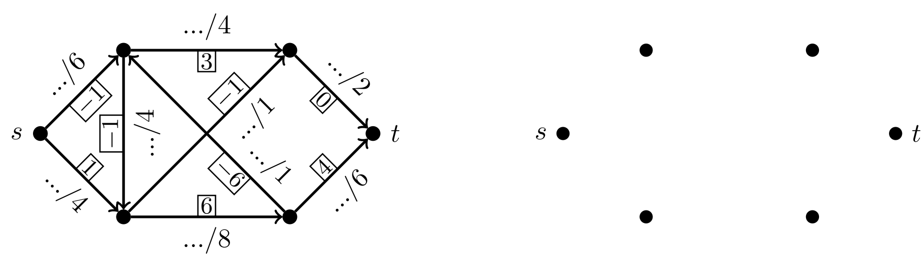
1. [**3 punkty**] Na poniższym rysunku napis .../c oznacza, że dana krawędź ma przepustowość c.
   - [**1 punkt**] Wpisz w puste miejsca na rysunku dowolny maksymalny (s,t)-przepływ.
   - [**1 punkt**] Zaznacz na rysunku dowolny minimalny (s,t)-przekrój.
   - [**1 punkt**] Podaj wartość przepływu, który zostanie znaleziony po pierwszej iteracji algorytmu Dinica.



2. [**2 punkty**]

   Znajdź dowolny (s,t)-przepływ o wartości 2 i najmniejszym koszcie spośród przepływów o wartości 2 w poniższej sieci. (Na każdej krawędzi liczba w ramce oznacza koszt, a liczba po '/' przepustowość.)

   Narysuj sieć residualną po zakończeniu algorytmu, na każdej jej krawędzi podaj koszt residualny (bez przepustowości).



3. [**6 punktów**] Czy poniższe problemy są NP-zupełne (o ile P≠NP)? Odpowiedz TAK/NIE i krótko uzasadnij, podając redukcję (bez uzasadnienia równoważności) lub algorytm (bez dowodu poprawności).

   a) [**2 punkty**] Dane grafy nieskierowane G i H. Czy istnieje homomorizm, tzn. funkcja $h : V(G) \to V(H)$ taka, że dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ jest $h(u)h(v) \in E(H)$?

   b) [**2 punkty**] Jak w a), ale G jest ścieżką prostą.

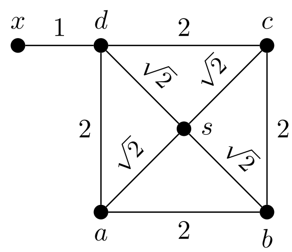
   c) [**2 punkty**] Jak w a), ale H jest ścieżką prostą.

4. [**3 punkty**] Algorytm Lovasza (randomizowany z wykładu) sprawdza, czy dany graf dwudzielny ma doskonałe skojarzenie, przez sprowadzenie tego problemu do testowania niezerowości pewnego wielomianu. Narysuj dowolny graf odpowiadający wielomianowi $-x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31}$.

5. [**4 punkty**] Poniższy program liniowy modeluje drzewa Steinera z nagrodami: mając dany graf nieskierowany $G=(V,E)$ z wagami $c: E \to \mathbb{Z}$ oraz $\pi: V \to \mathbb{Z}$ oraz wierzchołek r znaleźć podgraf spójny zawierający r, który minimalizuje sumę wag krawędzi pomniejszoną o sumę wag wierzchołków (podgrafu). Podaj program dualny.

$$
\begin{array}{llcll}
\min & \sum_{e\in E} c(e)x_e - \sum_{v\in V}\pi(v)y_v & & & \\
 & \sum_{e\in E(S,V\setminus S)} x_e & \geq & y_v & \forall S\subseteq V\setminus\{r\}, S\neq\emptyset \quad \forall v\in S \\
 & x_e & \geq & 0 & \forall e\in E \\
 & y_v & \leq & 1 & \forall v\in V\setminus\{r\} \\
 & y_r & = & 1 &
\end{array}
$$

6. [**4 punkty**] W tym zadaniu pytamy o algorytm 2-aproksymacyjny dla problemu lasu Steinera, korzystający z metody prymalno-dualnej. Rozważmy instancję (G,w,S), gdzie G jest grafem pełnym o wierzchołkach x,a,b,c,d,s, które są punktami płaszczyzny narysowanymi poniżej, a w zwykłą odległością euklidesową (podaliśmy także długości niektórych odcinków) natomiast S jest rodziną zbiorów wierzchołków do połączenia $S=\{\{x,b,d\},\{a,c\}\}$.



a) Jaki współczynnik aproksymacji ma ten algorytm dla tej instancji? (1p)

b) Podaj wartości wszystkich niezerowych zmiennych dualnych na końcu działania algorytmu. (3p)

7. [**2 punkty**] Dla pewnego problemu parametryzowanego (ozn. rozmiar instancji przez n, parametr przez k) zaproponowano algorytm przez rozgałęzianie, w którym głębokość rekurencji jest ograniczona przez $f(n,k)$, natomiast maksymalna liczba rozgałęzień (wywołań rekurencyjnych w funkcji rekurencyjnej) jest ograniczona przez $g(n,k)$. Czas potrzebny do wykonania operacji w pojedynczym wywołaniu funkcji rekurencyjnej jest ograniczony przez $O(n)$. W każdej z poniższych opcji zaznacz, czy jest to algorytm FPT (tzn. algorytm parametryzowany), czy algorytm XP, czy żaden z nich.

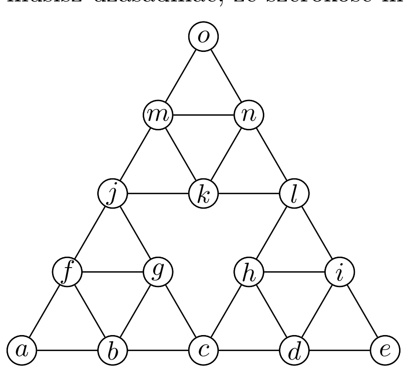
a) $f(n,k)=k^2$, $g(n,k)=5$

b) $f(n,k)=k^3$, $g(n,k)=n+k$

c) $f(n,k)=n+k$, $g(n,k)=k^3$

d) $f(n,k)=2^k$, $g(n,k)=k^2$

8. [**3 punkty**] Jaka jest szerokość drzewowa poniższego grafu? Wskaż odpowiednią dekompozycję drzewową. (Nie musisz uzasadniać, że szerokość nie może być mniejsza.)



9. [**2 punkty**] Ile razy algorytm Edmondsa uruchomiony w grafie dwudzielnym wykona operację ściągnięcia kielicha? (Krótko uzasadnij odpowiedź.)