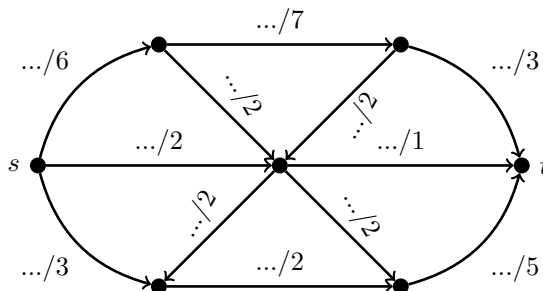


Imię i nazwisko

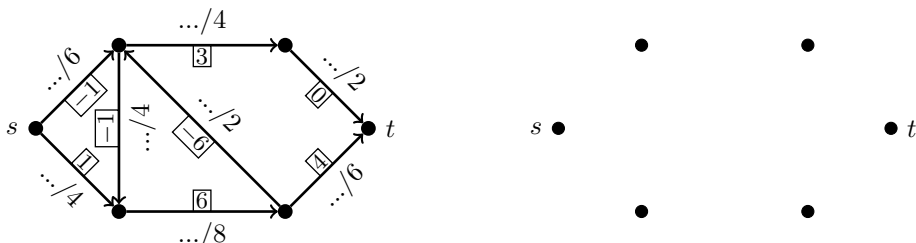
Egzamin z algorytmiki 18.06.2019 – test (90 minut)

UWAGA: Należy koniecznie krótko uzasadniać swoje odpowiedzi.

1. (0...3 pt.) Na poniższym rysunku napis \dots/c oznacza, że dana krawędź ma przepustowość c .
 - (0...1 pt.) Wpisz w puste miejsca na rysunku dowolny maksymalny (s, t) -przepływ.
 - (0...1 pt.) Zaznacz na rysunku dowolny minimalny (s, t) -przekrój.
 - (0...1 pt.) Podaj wartość przepływu, który zostanie znaleziony po pierwszej iteracji algorytmu Edmondsa-Karpa.



2. (0...2 pt.) Znajdź dowolny maksymalny (s, t) -przepływ o najmniejszym koszcie w poniższej sieci. (Na każdej krawędzi liczba w ramce oznacza koszt, a liczba po $'/'$ przepustowość.)
Narysuj sieć residualną po zakończeniu algorytmu, na każdej jej krawędzi podaj koszt residualny (bez przepustowości).



3. (0...6 pt.) Czy poniższe problemy są NP-zupełne (o ile $P \neq NP$)? Odpowiedz TAK/NIE i krótko uzasadnij, podając redukcję (bez uzasadnienia równoważności) lub algorytm (bez dowodu poprawności).
 - (0...2 pt.) Dany jest zbiór S liczb naturalnych. Czy można podzielić S na 3 rozłączne podzbiory o równych sumach?
 - (0...2 pt.) Dane dwa programy liniowe. Czy istnieje wspólne rozwiązanie dopuszczalne obu programów?
 - (0...2 pt.) Dane dwa programy liniowe. Czy istnieje wspólne rozwiązanie optymalne obu programów?
4. (0...3 pt.) Jakie prawdopodobieństwo sukcesu ma algorytm Kargera (dla problemu minimalnego przekroju, z wykładu) wykonany (bez powtórzeń) na cyklu $(n - 1)$ -wierzchołkowym do którego dodano pojedynczą krawędź łączącą cykl z nowym (n -tym) wierzchołkiem? Opowiedz uzasadnij.

5. (0..4 pt.) W problemie plecakowym danych jest n przedmiotów o rozmiarach $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}$ i wartościach $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{N}$ oraz rozmiar plecaka $B \in \mathbb{N}$. Należy znaleźć najbardziej wartościowy zbiór przedmiotów, które mieszczą się w plecaku. Rozważmy algorytm który sortuje przedmioty nierosnąco względem ilorazu v_i/s_i i bierze do rozwiązania kolejne przedmioty w tym porządku, aż do pierwszego, który już się nie mieści w plecaku. Jaki jest współczynnik aproksymacji tego algorytmu, w sytuacji gdy dla każdego $i = 1, \dots, n$ mamy $s_i \leq B/2$? Odpowiedzi krótko uzasadnij. Punktowane jest zarówno oszacowanie współczynnika od dołu jak i od góry.

6. (0..3 pt.) Poniższy program liniowy modeluje problem plecakowy, opisany w poprzednim zadaniu. Podaj program dualny.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n v_i x_i \\ \forall i = 1, \dots, n \quad & \sum_{i=1}^n s_i x_i \leq B \\ \forall i = 1, \dots, n \quad & x_i \leq 1 \\ \forall i = 1, \dots, n \quad & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

7. (0..2 pt.) W tym zadaniu pytamy o algorytm aproksymacyjny dla problemu ważonego pokrycia wierzchołkowego, korzystający z metody prymalno-dualnej.

- a) Wstaw A: dopuszczalne, B: całkowitoliczbowe, aby uzyskać zdanie prawdziwe:

Algorytm utrzymuje $[A/B]$ rozwiązanie prymalne i $[A/B]$ rozwiązanie dualne.

- b) Niech $\{x_v\}_{i=v \in V}$ będzie rozwiązaniem prymalnym, oraz $\{y_e\}_{e \in E}$ rozwiązaniem dualnym. Które zdania są **niezmiennikami** algorytmu?

$$\sum_{v \in V} w(v)x_v \geq \sum_{e \in E} y_e \quad \text{PRAWDA / FAŁSZ}$$

$$\sum_{v \in V} w(v)x_v \leq 2 \sum_{e \in E} y_e \quad \text{PRAWDA / FAŁSZ}$$

8. (0..4 pt.) Zaproponuj algorytm FPT dla problemu największego zbioru niezależnego w grafach o maksymalnym stopniu 3, parametryzowanego wielkością rozwiązania k .

9. (0..3 pt.) Jaka jest szerokość ścieżkowa poniższego grafu? Wskaż odpowiednią dekompozycję ścieżkową. (Nie musisz uzasadniać, że szerokość nie może być mniejsza.)

