

## Algorytmy aproksymacyjne część II

1. (**Algorytmy zachłanne dla problemu plecakowego**) Rozważ 3 strategie zachłanne dla problemu plecakowego, tzn. wybieramy przedmioty w kolejności a) malejących cen, b) rosnących rozmiarów, c) malejących ilorazów cena / rozmiar. Pokaż, że żadna z tych strategii nie daje stałego współczynnika aproksymacji.
2. (**Algorytm 2-aproksymacyjny dla problemu plecakowego**) Rozważmy algorytm c) z poprzedniego zadania. Załóżmy, że algorytm wybrał kolejno przedmioty  $a_1, \dots, a_{k-1}$ , natomiast kolejny przedmiot  $a_k$  już się nie zmieścił (zakładamy, że każdy przedmiot osobno mieści się w plecaku). Na końcu algorytmu wybieramy lepsze z dwóch rozwiązań:  $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$  lub  $\{a_k\}$ . Pokaż, że tak zmodyfikowany algorytm ma współczynnik aproksymacji 2.
3. Podaj wielomianowy schemat aproksymacyjny (**PTAS**) dla **problemu plecakowego**. (Zadanie rozwiązywane z pomocą prowadzącego, który zdefiniuje PTAS i FPTAS.)
4. Rozważmy następujący algorytm dla problemu (ważonego) pokrycia wierzchołkowego: rozwiąż poniższy program i zwróć wszystkie wierzchołki  $v$  takie że  $x_v > 0$ .

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{v \in V} x_v \\ & x_u + x_v \geq 1 \quad \text{dla każdego } uv \in E \\ & x_v \geq 0 \quad \text{dla każdego } v \in V, \end{array}$$

Pokaż, że wierzchołki wielościanu tego programu liniowego są *półcałkowitoliczbowe*, tzn. zmienne mają wartości 0,  $\frac{1}{2}$  lub 1. Jaki jest współczynnik aproksymacji tego algorytmu?

5. (Opcjonalne) *Orientacją* grafu nieskierowanego  $G = (V, E)$  nazywamy dowolny graf skierowany  $G'$ , który możemy otrzymać z  $G$  zastępując każdą z jego krawędzi  $uv$  krawędzią skierowaną  $(u, v)$  lub  $(v, u)$ .

Rozważmy następujący problem. Dany jest graf nieskierowany  $G = (V, E)$ . Dla każdego wierzchołka  $v \in V$  określone są dwie liczby całkowite:  $\text{in}(v)$  i  $\text{out}(v)$ . Należy znaleźć największy (pod względem liczby krawędzi) podgraf  $H$  grafu  $G$  i jego orientację  $H'$  taką, żeby dla każdego wierzchołka  $v$  w  $H'$  było co najwyżej  $\text{in}(v)$  krawędzi wchodzących i co najwyżej  $\text{out}(v)$  krawędzi wychodzących.

- (a) Napisz program liniowy całkowitoliczbowy, który modeluje problem optymalizacyjny opisany w zadaniu.
- (b) Podaj algorytm 1/2-aproksymacyjny dla tego problemu oparty o zaokrąglanie rozwiązania optymalnego programu liniowego.