Algorytmy aproksymacyjne I

1. (**Drzewo Steinera**) W problemie drzewa Steinera dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$ z wagami na krawędziach $w : E \to \mathbb{R}_+$ oraz zbiór terminali $T \subseteq V$. Należy znaleźć najtańszy (w sensie sumy wag krawędzi) podgraf H grafu G tak, żeby dowolne dwa wierzchołki $s, t \in T$ były połączone ścieżką w H.

   Zaproponuj algorytm 2-aproksymacyjny dla problemu drzewa Steinera. Udowodnij, że nie da się poprawić oszacowania współczynnika aproksymacji Twojego algorytmu („trudny przykład”).

2. (przypomnienie) Pokaż, że znalezienie najcięższego/najlżejszego pokrycia cyklowego w ważonym grafie skierowanym sprowadza się do najcięższego/najlżejszego skojarzenia w grafach dwudzielnych (a ten problem był rozwiązany na wykładzie przez najtańszy przepływ).

3. (**maxTSP w grafach skierowanych**) Dany jest pełny graf skierowany $G = (V, E)$ oraz funkcja wagowa $w : V^2 \to \mathbb{R}_+$. (Funkcja w nie musi spełniać nierówności trójkąta, ani nie musi być symetryczna.) Należy znaleźć cykl Hamiltona o **największej** wadze.

   (a) Podaj algorytm 2-aproksymacyjny

   (b) Czy jeśli dopuścimy ujemne wagi to algorytm 2-aproksymacyjny będzie możliwy?

4. (**Asymetryczny minTSP z nierównością trójkąta**) Dany jest pełny graf skierowany $G = (V, E)$ oraz funkcja wagowa $w : V^2 \to \mathbb{R}_+$. Funkcja w spełnia nierówność trójkąta ale nie musi być symetryczna. Należy znaleźć cykl Hamiltona o **najmniejszej** wadze. Podaj algorytm $\log_2 n$-aproksymacyjny. Wskazówka: użyj pokryć cyklowych.

5. **(Orientacje)** Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$. Dla każdego wierzchołka $v \in V$ określone są dwie liczby całkowite: $\mathrm{in}(v)$ i $\mathrm{out}(v)$. Na każdej krawędzi $uv \in E$ wykonujemy dokładnie jedną z trzech akcji: usunięcie uv, zastąpienie krawędzią skierowaną (u, v) lub zastąpienie krawędzią skierowaną (v, u). Należy znaleźć największy (pod względem liczby krawędzi) graf skierowany H, który powstaje z G w opisany sposób, oraz dla każdego wierzchołka v, graf H ma co najwyżej $\mathrm{in}(v)$ krawędzi wchodzących i co najwyżej $\mathrm{out}(v)$ krawędzi wychodzących.

   Podaj algorytm 2-aproksymacyjny. Wskazówka: użyj przepływów.

6. (opcjonalnie) Podaj przykład, że algorytm zachłanny dla problemu najmniejszego pokrycia wierzchołkowego (kolejno wybiera wierzchołki największego stopnia i je usuwa) a) nie jest 2-aproksymacyjny b) ma współczynnik aproksymacji $\Omega(\log n)$.

7. (opcjonalnie) Rozważmy algorytm zachłanny dla SET COVER: dopóki istnieją niepokryte elementy, wybierz zbiór który pokrywa najwięcej *nowych* elementów. Udowodnij, że ten algorytm jest H_n-aproksymacyjny, gdzie $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.