Programowanie liniowe II

1. Problem najkrótszej ścieżki

   (a) Sformułuj problem najkrótszej ścieżki od s do t jako minimalizacyjny program liniowy

   (b) Udowodnij że wierzchołki wielościanu tego PL są całkowitoliczbowe

   (c) Napisz program dualny

   (d) Udowodnij, nie korzystając z punktu b), że program dualny znajduje najkrótszą ścieżkę.

2. Skojarzenia w grafie dwudzielnym.

   (a) Napisz program całkowitoliczbowy dla maksymalnego skojarzenia w dowolnym grafie.

   (b) Pokaż, że dla grafu dwudzielnego, po zamianie warunkow $x_i = 0, 1$ na $x_i \geq 0$ dostaniemy PL, ktory ma wszystkie wierzchołki całkowitoliczbowe.

   (c) Podaj przykład, że powyższe nie zachodzi dla grafu dowolnego .

   (d) Napisz program dualny do programu z punktu b)

   (e) Jaki problem otrzymujemy po zamianie programu dualnego na całkowitoliczbowy?

   (f) Udowodnij tw. Königa-Egervary jako wniosek z silnej dualności LP.

3. Rozważmy grafu skierowany o wierzchołkach $\{1, \ldots, n\}$ i krawędziach $e_1, \ldots, e_m$. Macierz incydencji tego grafu to macierz A o wymiarach $n \times m$ mamy taka, że $a_{i,j}$ wynosi 1 gdy e_j wychodzi z i, -1 gdy e_j wchodzi do i oraz 0 w przeciwnym przypadku (tzn. gdy e_j nie jest incydentna z i). Pokaż, że A jest unimodularna.

4. Maksymalny przepływ.

   (a) Pokaż całkowitą unimodularność macierzy następującego programu liniowego dla przepływu:

zmaksymalizuj	x_{ts}	
z zachowaniem warunków	$\sum_{w \in V}(x_{vw} - x_{wv}) = 0$	dla każdego $v \in V$
	$x_{vw} \leq c(v, w)$	dla wszystkich $v, w \in V$
	$x_{vw} \geq 0$	dla wszystkich $v, w \in V$

   (b) Podaj program dualny.

   (c) Udowodnij tw. o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju jako wniosek z silnej dualności LP.