Programowanie liniowe I

Zadania oznaczone ♠ są zadaniami dodatkowymi, które należy robić w miarę wolnego czasu.

1. Dla następujących problemów napisz równoważne programy liniowe:

   (a) Przepływ o danej wartości i minimalnym koszcie.

   (b) ♠ Maksymalny przepływ o minimalnym koszcie.

   (c) Przepływ wielotowarowy: dany graf skierowany i przepustowości na krawędziach. Dodatkowo mamy k towarów oraz dla $i = 1, \ldots, k$ chcemy d_i ton i-tego towaru przesłać z s_i do t_i.

   (d) Jeśli dla danego zbioru ograniczeń liniowych dla zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ chcemy zminimalizować wartość $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$ to nie możemy tego zrobić wprost przez program liniowy, gdyż funkcja max nie jest liniowa. Podaj równoważny program liniowy.

   (e) Problem fabryki lodów. Mamy dane n miesięcy, w i-tym miesiącu popyt na lody będzie d_i. Chcemy w każdy miesiącu produkować pewną ilość lodów tak, by w sumie nie zostały nam żadne lody na koniec, i w każdym miesiącu wysycić cały popyt. Na początku nie mamy lodów i nasza fabryka nie pracuje. Płacimy c_1 za zmianę produkcji fabryki (na początku miesiąca) o 1 oraz c_2 za przechowanie jednej jednostki lodów przez miesiąc. Zminimalizować całkowity koszt.

   (f) Danych jest n punktów (x_i, y_i) na płaszczyźnie. Znaleźć prostą $y = ax + b$ taką, żeby liczba $\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$ była jak najmniejsza. (Uwaga: takiej miary dopasowania prostej często używa się zamiast sumy kwadratów $\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$, gdy spodziewamy się że pojawi się kilka punktów osobliwych bardzo odległych od szukanej prostej.)

   (g) Mając dany ciąg liczb całkowitych $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, liczbę całkowitą c_1 oraz współczynniki wymierne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, funkcję $f : [t_1, t_n] \to \mathbb{R}$ definiujemy następująco: $f(t_1) = c_1$ oraz dla każdego $1 \leq i < n$ na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$ funkcja f jest funkcją liniową ze współczynnikiem kierunkowym α_i, tj. jeśli $f(t_i) = c_i$ to dla każdego $t_i \leq x \leq t_{i+1}$ mamy $f(x) = c_i + (x - t_i) \cdot \alpha_i$.

   Dla tak zdefiniowanej funkcji f i dla ciągu par liczb całkowitych $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$, gdzie $t_1 \leq x_i \leq t_n$ dla każdego $1 \leq i \leq m$, definiujemy *koszt* funkcji f jako

   $$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - y_i|,$$

   Rozważmy następujący problem. Dane są liczby całkowite c_1, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, pary liczb całkowitych $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$, gdzie $t_1 \leq x_i \leq t_n$ dla każdego $1 \leq i \leq m$, oraz liczba wymierna W. Należy znaleźć wartości $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ tak, by koszt funkcji f nie przekraczał W.

   (h) ♠ Znajdowanie optymalnej strategii mieszanej w grze 2-osobowej.

2. Pokaż, że w problem programowania liniowego, istnieje rozwiązanie optymalne, którego wielkość zapisu binarnego jest wielomianowa w wielkości wejścia.

3. Mówimy, że macierz A jest *całkowicie unimodularna* jeśli dla każdej podmacierzy A' macierzy A, mamy $\det A' \in \{-1, 0, 1\}$. Pokazać, że jeśli wektor b jest calkowitoliczbowy i macierz A jest całkowicie unimodularna to program $Ax \leq b$ ma wierzchołki całkowitoliczbowe.