

Algorytmy randomizowane

1. W problemie pakowania TRIANGLE PACKING mamy dany graf nieskierowany G oraz liczbę naturalną k . Należy ustalić, czy G zawiera k rozłącznych wierzchołkowo trójkątów. Podaj algorytm parametryzowany działający w czasie $2^{O(k)}n^{O(1)}$ dla problemu TRIANGLE PACKING. Twój algorytm może być randomizowany.

Wskazówka: Color coding.

2. (n, k) -doskonała rodzina haszująca to rodzina \mathcal{F} funkcji $f : U \rightarrow \{1, \dots, k\}$ taka, że dla każdego zbioru $X \in \binom{U}{k}$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{F}$ taka, że $f|_X$ jest różnowartościowa. W 1995 roku Naor, Schulman, Srinivasan udowodnili następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 Dla $n, k \geq 1$ można zbudować (n, k) -doskonałą rodzinę haszującą rozmiaru $e^k k^{O(\log k)} \log n$ w czasie $e^k k^{O(\log k)} n \log n$.

Udowodnij, że problemy k -PATH i TRIANGLE PACKING mają algorytmy deterministyczne działające w czasie $2^{O(k)}n^{O(1)}$.

3. W problemie MAX-SAT dla danej formuły w postaci k -CNF należy znaleźć wartościowanie zmiennych takie, aby zmaksymalizować liczbę spełnionych klauzul.
 - a) Rozważmy algorytm, który zwraca losowe wartościowanie. Jaka jest wartość oczekiwana liczby spełnionych klauzul? Porównaj wartość oczekiwaną z rozwiązaniem optymalnym.
 - b) Przeprowadź derandomizację powyższego algorytmu metodą warunkowej wartości oczekiwanej.
4. Dane są trzy macierze $n \times n$ o elementach całkowitych, A , B i C . Opisz algorytm randomizowany typu Monte Carlo, który sprawdzi, czy $A \cdot B = C$ w czasie $O(n^2)$ i z prawdopodobieństwem błędu nie większym niż $\frac{1}{n}$.

Wskazówka: Zauważ, że dla niezerowej macierzy D nieczęsto się zdarza, żeby $Dx = 0$.

5. (opcjonalne) Przekrojem w grafie G nazywamy taki zbiór krawędzi X , że $G - X$ nie jest spójny. W problemie MAX CUT dany jest graf nieskierowany i należy znaleźć przekrój o największej liczbie krawędzi. Zaproponuj prosty randomizowany algorytm $\frac{1}{2}$ -aproxymacyjny dla tego problemu i przeprowadź derandomizację metodą warunkowej wartości oczekiwanej.