ZESTAW V

① Inwersje w przestrzeni euklidesowej z dodanym punktem w nieskończoności.

Oznaczenia: dla $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$,
$x\cdot y=\sum_1^n x_j y_j$, $\|x\|=(x\cdot x)^{1/2}$, $S(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\|=r\}$,
$S^{n-1}\overset{!}{=}S(0,1)\subset\mathbb{R}^n$.

(A) Topologię w przestrzeni $\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ określamy przyjmując jako zbiory otwarte w $\overline{\mathbb{R}^n}$ zbiory otwarte w $\mathbb{R}^n$ oraz zbiory postaci $(\mathbb{R}^n\setminus K)\cup\{\infty\}$, gdzie $K\subset\mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym. Wykazać, że przestrzeń $\overline{\mathbb{R}^n}$ jest homeomorficzna z S^n.

(B) Inwersją przestrzeni $\overline{\mathbb{R}^n}$ względem sfery S^{n-1} nazywamy przekształcenie $T:\overline{\mathbb{R}^n}\to\overline{\mathbb{R}^n}$ określone formułą

$$T(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\|x\|^2}, & \text{jeśli } x\neq 0,\infty,\\ \infty, & \text{jeśli } x=0\\ 0, & \text{jeśli } x=\infty.\end{cases}$$

Pokazać, że inwersja T jest homeomorfizmem, inwolucją (tzn. $T=T^{-1}$), sfera S^{n-1} jest zbiorem punktów stałych T oraz T przekształca dowolną sferę $S(a,r)$ w $\mathbb{R}^n$ na sferę, jeśli $0\notin S(a,r)$, lub na hiperpłaszczyznę uzupełnioną punktem ∞, jeśli $0\in S(a,r)$.

[Wskazówka: Sfera $S(a,r)$ jest opisana równaniem $(x-a)\cdot(x-a)=r^2$, tzn. $\|x\|^2-2(x\cdot a)+(\|a\|^2-r^2)=0$.

Jeśli $s=\|a\|^2-r^2\neq 0$, tzn. $0\notin S(a,r)$ pokazać, że $T(S(a,r))=S(\frac{1}{s}a,\frac{r}{s})$.

Jeśli $s=0\in S(a,r)$, pokazać, że $T(S(a,r))$ jest hiperpłaszczyzną prostopadłą do $\vec{0a}$ i przechodzącą przez $T(2a)=\dfrac{a}{2\|a\|^2}$, uzupełnioną punktem ∞.]

(C) Pokazać, że dla każdego $a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ pochodna inwersji T w punkcie a jest przekształceniem ortogonalnym i wywnioskować stąd, że inwersja T zachowuje kąty między przecinającymi się krzywymi gładkimi w $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

[Wskazówka: Dla $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, niech
$A=\dfrac{1}{\|a\|^2}(a_j\cdot a_k)_{j,k=1}^n$. Sprawdzić, że $A^T=A$, $A^2=A$ i pokazać, że macierz pochodnej $dT(a)$ ma postać $\dfrac{1}{\|a\|^2}(I-2A)$].

(D) Inwersją przestrzeni $\overline{\mathbb{R}^n}$ względem sfery $S(a,r)$ nazywamy przekształcenie $T_{a,r}:\overline{\mathbb{R}^n}\to\overline{\mathbb{R}^n}$ określone formułą
$T_{a,r}(x)=a+r^2T(x-a)$, zob. (B).

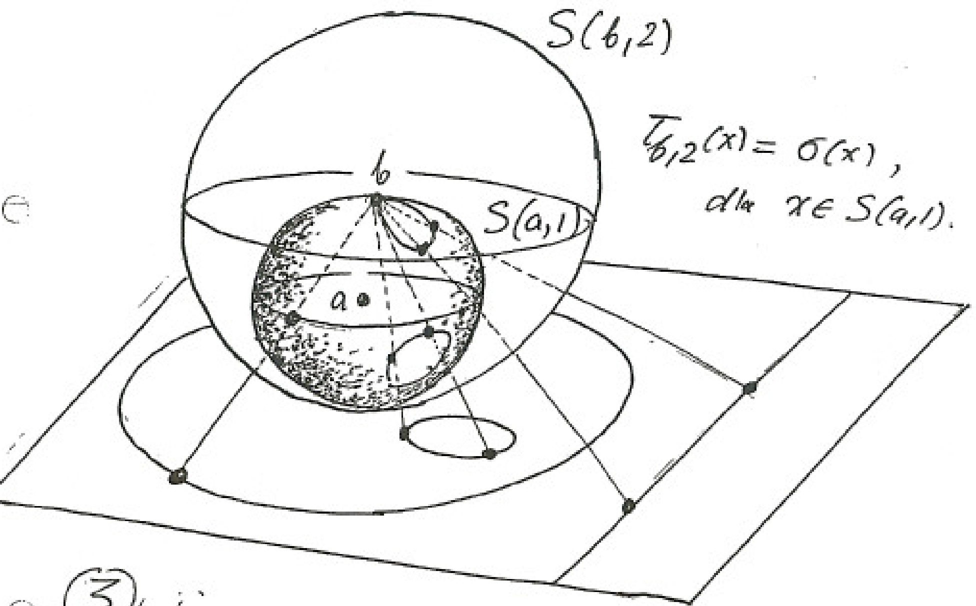
Wywnioskować z (B) i (C), że $T_{a,r}$ jest homeomorfizmem, inwolucją, $S(a,r)$ jest zbiorem punktów stałych $T_{a,r}$ oraz $T_{a,r}$ przekształca sfery w $\mathbb{R}^n$ nie zawierające a na sfery i sfery zawierające a na hiperpłaszczyzny z dodanym punktem ∞, a także, że $T_{a,r}$ zachowuje kąty między przecinającymi się krzywymi gładkimi w $\mathbb{R}^n\setminus\{a\}$.

② Rzut stereograficzny. Przyjmujemy oznaczenia z zadania 1. Będziemy utożsamiać $\overline{\mathbb{R}^2}$ z płaszczyzną zespoloną z dodanym punktem w nieskończoności, którą oznaczamy symbolem $\overline{\mathbb{C}}$.

Niech $a=(0,0,1)$, $b=(0,0,2)$. Rzutem stereograficznym $\sigma:S(a,1)\to\overline{\mathbb{C}}$ nazywamy obcięcie do sfery $S(a,1)\subset\mathbb{R}^3$ inwersji $T_{b,2}:\overline{\mathbb{R}^3}\to\overline{\mathbb{R}^3}$ względem sfery $S(b,2)\subset\mathbb{R}^3$.

Pokazać, że $T_{b,2}$ przeprowadza $S(a,1)$ na $\overline{\mathbb{C}}$, przy czym biegun b przechodzi na ∞, okręgi leżące na $S(a,1)$

i nie zawierające b przechodzą na okręgi oraz okręgi na $S(a,1)$ zawierające b przechodzą na proste, z dodanym punktem ∞, a ponadto, σ zachowuje kąty między przecinającymi się krzywymi gładkimi na $S(a,1)\setminus\{b\}$.



$T_{b,2}(x)=\sigma(x)$, dla $x\in S(a,1)$.

(3) Pokazać, że inwersja $T(z)=\frac{z}{|z|^2}=\frac{1}{\bar z}$, dla $z\neq 0$, nie jest przekształceniem holomorficznym.

(4) Pokazać, że przekształcenie $z\to\frac{1}{z}$ jest złożeniem inwersji względem okręgu $\{z:|z|=1\}$ (zob. zad. 1 (B)) oraz symetrii w prostej rzeczywistej $z\to\bar z$ i wywnioskować stąd, że przekształcenie $z\to\frac{1}{z}$ przeprowadza okręgi nie przechodzące przez zero na na okręgi, a okręgi przechodzące przez zero na proste, uzupełnione punktem ∞.

(5) <u>Homografie</u> ($\equiv$ przekształcenia Möbiusa). Homografia $S:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ (zob. zad. 2) jest określona formułą $S(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, dla $z\in\mathbb{C}$, przy czym $ad-bc\neq 0$ oraz dodatkowo, jeśli $c\neq 0$, $S(-\frac{d}{c})=\lim_{z\to-\frac{d}{c}}S(z)=\infty$ i $S(\infty)=\lim_{z\to\infty}S(z)=\frac{a}{c}$, a jeśli $c=0$ (tzn. S jest przekształceniem liniowym), $S(\infty)=\lim_{z\to\infty}S(z)=\infty$.

(A) Pokazać, że każda homografia jest złożeniem następujących homografii: $z\to\frac{1}{z}$ (przy czym $0\to\infty$, $\infty\to 0$), przesunięć $z\to z+a$ ($\infty\to\infty$) i dylatacji $z\to cz$, $c\neq 0$ ($\infty\to\infty$). Wywnioskować stąd, że homografie przeprowadzają okręgi w $\mathbb{C}$ na okręgi lub proste z dodanym punktem ∞.

(B) Pokazać, że homografia, która nie jest identycznością, ma co najwyżej dwa punkty stałe i wywnioskować stąd, że jeśli homografie przyjmują takie same wartości w trzech różnych punktach z $\overline{\mathbb{C}}$, to są identyczne.

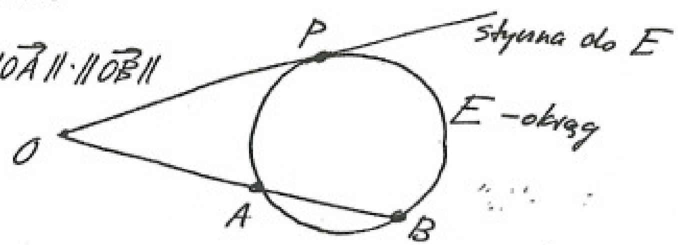
(C) Pokazać, że dla każdej trójki a,b,c różnych punktów w $\overline{\mathbb{C}}$ i trójki różnych punktów $a',b',c'\in\overline{\mathbb{C}}$ istnieje dokładnie jedna homografia $S:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ taka, że $S(a)=a'$, $S(b)=b'$, $S(c)=c'$.

[<u>Wskazówka</u>: Rozpatrzyć najpierw $a,b,c\in\mathbb{C}$ i pokazać, że $S(z)=\left(\frac{z-b}{z-c}\right)\Big/\left(\frac{a-b}{a-c}\right)$ przekształca a w 1, b w 0 i c w ∞].

(D) Niech $C=\{z: |z|=1\}$ i niech E będzie okręgiem w $\mathbb{C}$ takim, że 0 nie leży w składowej ograniczonej $\mathbb{C}\setminus E$, E przecina C w dwóch różnych punktach i niech $z, z^* \in E$ będą różnymi punktami leżącymi na prostej przechodzącej przez 0. Pokazać, że z^* jest obrazem z przy inwersji względem C wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C i E przecinają się ortogonalnie.

[Wskazówka. Skorzystać z twierdzenia z geometrii zilustrowanego na rysunku:

$\|\overrightarrow{OP}\|^2=\|\overrightarrow{OA}\|\cdot\|\overrightarrow{OB}\|$



]

(E) Pokazać, że jeśli $S:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ jest homografią, z^* jest obrazem z przy inwersji względem $C=\{z:|z|=1\}$ i $S(C)$ jest okręgiem (odpowiednio – prostą z punktem ∞), to $S(z^*)$ jest obrazem $S(z)$ przy inwersji (odpowiednio, symetrii) względem okręgu (odpowiednio, prostej) $S(C)$.

[Wskazówka: Skorzystać z (A) i (D)].

(F) Pokazać, że homografia $S:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ przeprowadza prostą rzeczywistą uzupełnioną punktem w nieskończoności $\overline{\mathbb{R}}$ na okrąg $C=\{z: |z|=1\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$S(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-w}{z-\overline{w}}$, $\theta\in\mathbb{R}$, $w\in\mathbb{C}$. Przy tym, $\operatorname{Im} w>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy górna półpłaszczyzna przechodzi

przy S na koło $\{z: |z|<1\}$.

[Wskazówka: Skorzystać z (E); przyjąć

$S(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{a}{c}\left(\dfrac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right)$, zauważyć, że $S(-\frac{d}{c})=\infty$, $S(-\frac{b}{a})=0$, 0 i ∞ są wzajemnie swoimi obrazami przy inwersji względem C i wywnioskować z warunku $S(\overline{\mathbb{R}})=C$, że $\frac{d}{c}=\overline{\left(\frac{b}{a}\right)}$].

(G) Pokazać, że homografia $S:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ przekształca okrąg $C=\{z: |z|=1\}$ na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $S(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-w}{1-\overline{w}z}$, gdzie $\theta\in\mathbb{R}$, $w\in\mathbb{C}$, przy czym koło $D=\{z: |z|\leq 1\}$ przekształca się przy S na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $|w|<1$.

[Wskazówka: Podobnie jak w (F), skorzystać z (E); przyjąć $S(z)=\dfrac{a}{c}\left(\dfrac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right)$ i zauważyć, że $S(-\frac{d}{c})=\infty$, $S(-\frac{b}{c})=0$ oraz 0 i ∞ są wzajemnie swoimi obrazami przy inwersji względem C i $S(C)=C$].

W pozostałych zadaniach przyjmujemy oznaczenia

$H_+=\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0\}$, $D=\{z: |z|<1\}$

(6) (A) Znaleźć przekształcenie konforemne obszaru ograniczonego okręgami C_1, C_2 o równych promieniach, przecinających się w punktach a, b pod kątem α (zob. rysunek) na H_+.

[<u>Wskazówka</u>: Rozpatrzyć homografię
$$S(z) = -\frac{z-a}{z-b},$$ zob. zad 5]

(B) Znaleźć przekształcenie opisane w (A) dla okręgów C_1, C_2 opisanych wzorami:

(i) $|z-1|=1$, $|z+i|=1$ (ii) $|z-(1+i)|^2=4$, $|z-(-1+i)|^2=4$.

(7) (A) Pokazać, że homografia $S(z) = \frac{z-i}{z+i}$ przekształca H_+ na D i opisać obrazy prostych $\operatorname{Re} z = c$, $\operatorname{Im} z = c$ oraz okręgów $|z| = r$ przy przekształceniu S (zob. zad. 5).

(B) Znaleźć przekształcenie konforemne pasa $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ na koło D.

(C) Znaleźć przekształcenie konforemne obszaru ograniczonego okręgami $|z-1|=1$ i $|z-2|=2$ na D.

(8) (A) Pokazać, że homografia $S(z) = -\frac{z+1}{z-1}$ przekształca półkole $D \cap H_+$ na $\{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$ i opisać obrazy prostych przechodzących przez zero i okręgów o środku w zerze przy przekształceniu S (zob. zad. 5).

(B) Znaleźć przekształcenie konforemne $D \cap H_+$ na H_+.

(9) Znaleźć przekształcenie konforemne obszaru $D \setminus \mathbb{R}_-$ na H_+, gdzie $\mathbb{R}_- = \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \le 0\}$.

(10) Znaleźć przekształcenie konforemne obszaru ograniczonego prostymi $y=0$, $y=\pi$, $x=0$ na H_+.

(11) Niech $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

(A) Pokazać, że f przekształca konforemnie $D \setminus \{0\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$, przy czym okręgi $|z| = r$ przechodzą na elipsy
$$\frac{x^2}{(r+\frac{1}{r})^2} + \frac{y^2}{(r-\frac{1}{r})^2} = \frac{1}{4}.$$

(B) Pokazać, że przy przekształceniu f proste $\operatorname{Arg} z = \alpha$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \mp\frac{\pi}{2}$, przechodzą na odpowiednie gałęzie hiperbol
$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

(12) Pokazać, że nie istnieje przekształcenie konforemne obszaru $D \setminus \{0\}$ na pierścień $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

[<u>Wskazówka</u>: Pokazać, że takie przekształcenie przedłużałoby się na D do funkcji holomorficznej].

(13) Niech U będzie obszarem jednospójnym, $U \neq \mathbb{C}$, $a \in U$ i niech $f : U \to U$ będzie funkcją holomorficzną taką, że $f(a) = a$. Pokazać, że $|f'(a)| \le 1$.

[<u>Wskazówka</u>: Skorzystać z twierdzenia Riemanna i Lematu Schwarza.]