ZESTAW IV

1. Niech $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Wykazać, że jeśli funkcja $g(z) = f(\frac{1}{z})$ ma w zerze osobliwość pozorną lub biegun, to f jest wielomianem.

2. Niech $f: \mathbb{C} \setminus B \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną mającą w punktach zbioru skończonego B bieguny. Wykazać, że jeśli $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, to f jest funkcją wymierną.

3. Niech $f: \mathbb{C} \setminus B \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną mającą w punktach zbioru skończonego B bieguny i niech $B \subset D = \{z : |z| \le r\}$.

(A) Pokazać, że dla $E = \{z : |z| < 1/r\}$,
$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \int_{\partial E} \frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}\,dz.$$

(B) Pokazać, że jeśli $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, to
$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \lim_{|z|\to 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{z}.$$

(C) Niech $f(z) = \dfrac{c_0 + c_1 z + \dots + c_k z^k}{d_0 + d_1 z + \dots + d_{k+1} z^{k+1}}$, $d_{k+1} \neq 0$.
Wykazać, że jeśli wszystkie zera wielomianu w mianowniku leżą w $D \setminus \partial D$, $D = \{z : |z| \le r\}$, to
$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \frac{2\pi i c_k}{d_{k+1}}.$$

4. Znaleźć całki $\int_{\partial D} f(z)\,dz$, gdzie

(A) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, $D = \{z : |z| \le 2\}$, (B) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, $D = \{z : |z| \le 4\}$,

(C) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - 1}$, $D = \{z : |z - i| \le 1\}$,

(D) $f(z) = \dfrac{z}{1 - \cos z}$, $D = \{z : |z| \le 4\}$,

(E) $f(z) = \dfrac{1+z}{1 - e^z}$, $D = \{z : |z| \le 8\}$.

5. Znaleźć całkę $\int_\gamma \dfrac{dz}{1 - \cos z}$, gdzie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest pętlą kawałkami gładką nie przechodzącą przez żaden punkt $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

6. Niech P będzie prostokątem o wierzchołkach $0, 10, 10+4i, 4i$. Znaleźć całki

(A) $\displaystyle\int_{\partial P} \frac{dz}{z^2 - 3z + 5}$, (B) $\displaystyle\int_{\partial P} \frac{dz}{z^2 - z + 1}$

7. Pokazać, że dla $a > 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iat}}{1+t^2}\,dt = \pi e^{-a}$ i wyprowadzić stąd, że $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{a^2 + t^2}\,dt = \frac{\pi}{a} e^{-a}$.

8 **Zastosowanie twierdzenia o residuach do obliczania całek** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, gdzie P i Q są wielomianami, Q nie ma pierwiastków rzeczywistych i stopień $Q \geq$ stopień $P+2$.

Pokazać, że

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (B) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx = \pi/3$

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}$ (D) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{x^5-1}dx = \frac{4\pi}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

9 **Zastosowanie twierdzenia o residuach do obliczania całek** $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$, gdzie R jest funkcją wymierną.

Podstawiając $e^{i\theta} = z$, $\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$ pokazać, że

(A) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, $a>1$

(B) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$, $0<a<1$,

(C) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

10 Niech γ będzie kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5]$, gdzie $w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = -\frac{1}{2}(1+i)$, $w_3 = 2+i$, $w_4 = -1+\frac{i}{3}$, $w_5 = 1-i$. Znaleźć całki:

(A) $\int_\gamma \frac{e^z}{\sin z}dz$ (B) $\int_\gamma \frac{z}{1-\cos z}dz$.

11 Wykazać, że dla n parzystych $\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^n d\theta = \frac{2\pi n!}{2^n[(\frac{n}{2})!]^2}$.

12 Niech $f: P \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, gdzie $P = \{z: |z| > R\}$. Wykazać, że jeśli $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, to w rozwinięciu funkcji f w szereg Laurenta w pierścieniu P znikają wszystkie potęgi nieujemne.

13 Znaleźć pięć pierwszych wyrazów rozwinięcia w szereg Laurenta funkcji $f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$ w pierścieniu $\{z: 0<|z|<1\}$.

14 Znaleźć rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji f w pierścieniu P:

(A) $f(z) = \frac{1}{z+3}$, $P = \{z: |z|>3\}$,

(B) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, $P = \{z: |z|>0\}$,

(C) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $P = \{z: 1<|z|<2\}$,

(D) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, $P = \{z: |z|>1\}$.