Egzamin z modelowania

28 stycznia 2008

Ustalenia wstępne. Zadania oceniamy binarnie. Ocena końcowa to 2+(liczba zrobionych zadań) dla osób, które uczęszczały na ćwiczenia i 1+(liczba zrobionych zadań) dla pozostałych. Każdy może e-mailem zasięgnąć informacji, czy naszym zdaniem uczęszczał na ćwiczenia. Tak jak mówiłem, egzamin trwa do godziny 24 w niedzielę 3. lutego, a przysłane zadania oceniamy po 48 godzinach od ich otrzymania. Jeśli jeszcze będzie czas, niezaliczone zadanie będzie można wtedy przysłać ponownie. Gdybyśmy się z przyczyn losowych opóźnili ze sprawdzeniem, damy w razie potrzeby dodatkowy czas na rozwiązanie tego zadania. Zawsze można pytać o treść zadań.

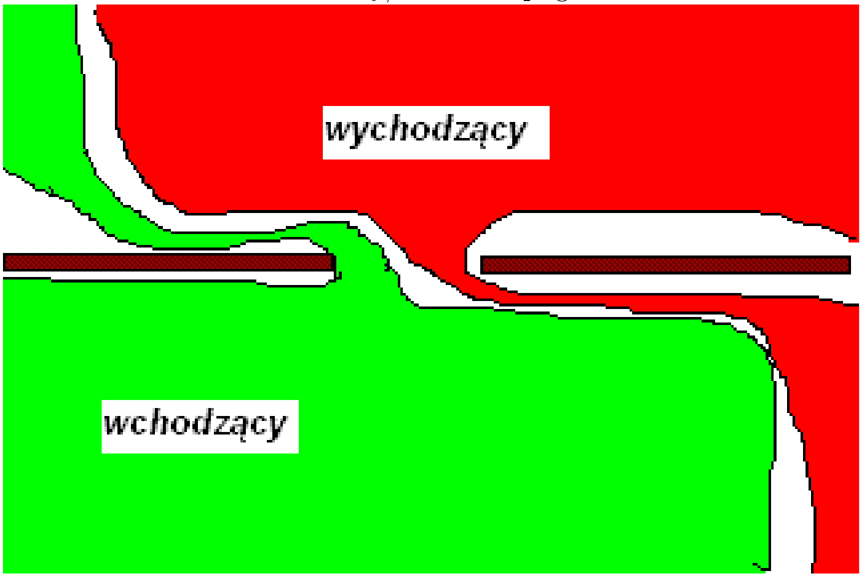
Zadanie 1. Znaleźć przynajmniej 4 punkty stałe układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - x + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y \\ y' &= 3x - 3x^2 + y - y^3 + \frac{3}{4}xy - \frac{3}{4}xy^2 \end{aligned}$$

Określić, które spośród tych punktów stałych są hiperboliczne.
Podać typ hiperbolicznych punktów stałych.

Zadanie 2. Proszę wpisać do Google terminy „panic” i „cellular” a szybko znajdą Państwo doktorat (po angielsku) na temat modelowania tłumu za pomocą automatu komórkowego. Proszę, być może inspirując się tym doktoratem, zaproponować możliwie nieskomplikowany automat komórkowy modelujący, przy założeniu sensownego stanu początkowego, następującą sytuację, którą widziałem 1. listopada w jednej z bram Cmentarza Powązkowskiego.
Z obu stron bramy napierały na siebie dwa tłumy: chcących wejść na cmentarz i chcących wyjść. Otóż w samej bramie stali policjanci i oddzielali ruch w obie strony, ale poza bramą, z każdej strony osobno, napierający tłum spychał idących w przeciwną stronę pod sam mur, skutecznie hamując ich ruch i powodując wzrost tłumu pod drugiej stronie, hamującego ich własny marsz. Widać to na obrazku poniżej.
Pytanie dodatkowe: czy można ten model wyposażyć w jakąś lokalną (tzn. niezależną w działaniu od położenia komórki) regułę, która zapobiegałaby takiemu niekorzystnemu rozwojowi sytuacji?

obrazy/cmentarz.png



Zadanie 3. Dany jest trójstanowy N-komórkowy automat, którego komórki tworzą cykl, tzn. funkcja przejścia automatu f ma postać

$$\begin{aligned} x'_n &= f(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}),\ 1 < n < N \\ x'_1 &= f(x_N, x_1, x_2) \\ x'_N &= f(x_{N-1}, x_N, x_1). \end{aligned}$$

Stany oznaczone są liczbami: 1,2,3.
Zdefiniuj f tak, by automat stabilizował się z każdą komórką w stanie 1 wtedy i tylko wtedy, gdy w chwili początkowej tyle samo komórek jest w stanie 2 co w stanie 3.

Zadanie 4.

- Dana jest kula wystrzelona przez armatę. Mierzymy jej położenie co 1 sekundę. Ile pomiarów potrzeba, by ustalić współczynniki i warunki początkowe równania opisującego ruch kuli armatniej? Zakładamy, że pomiary są dokładne i nie występują opory ruchu.

- Dany jest oscylator harmoniczny. Mierzymy jego położenie co 1 sekundę. Ile pomiarów potrzeba, by ustalić współczynniki i warunki początkowe równania opisującego ruch tego oscylatora? Zakładamy, że pomiary są dokładne i nie występują opory ruchu.

Zadanie 5. W klasycznej teorii gier mówi się o:

- *Równowadze Nasha*, która jest takim wektorem strategii poszczególnych graczy, że żaden z nich nie zyskuje, jednostronie zmieniając swoją strategię.

- *Rozwiązaniu optymalnym w sensie Pareto*, które jest takim wektorem strategii poszczególnych graczy, że żadna zmiana tego wektora (być może na wielu pozycjach) nie spowoduje, że przynajmniej jeden z graczy istotnie zyska na zmianie, a nikt nie straci.

Rozważmy jeszcze jedno pojęcie, nazwijmy je umownie *niby-równowagą*. Otóż wektor stategii jest taką niby-równowagą, gdy nie istnieje dwuelementowy podzbiór zbioru graczy taki, że mogą oni, zmieniając swoje i tylko swoje strategie, spowodować, że co najmniej jeden z nich zyska na tej zmianie, a drugi na niej nie straci.
W grach dwuosobowych niby-równowaga to rozwiązanie optymalne w sensie Pareto i na odwrót. Czy jest tak i dla większej liczby graczy? Czy istnieją gry wieloosobowe bez niby-równowagi? Czy można za pomocą niby-równowagi powiedzieć coś ciekawego o zjawisku korupcji? Jakie jeszcze pytania matematyczne można sobie postawić na temat niby-równowagi?