

## Egzamin z logiki, 04/09/2000

1. Niech  $\mathbb{N}$  będzie standardowym modelem arytmetyki, nad standardową sygnaturą, składającą się z symboli  $+, *, 0, 1, \leq$ .

Mówimy, że funkcja  $F : \omega \rightarrow \omega$  jest *definiowalna*, gdy istnieje formuła  $\varphi(x, y)$  nad sygnaturą arytmetyki taka, że każdego wartościowania  $v : X \rightarrow \omega$  zachodzi

$$\mathbb{N} \models \varphi[v] \text{ wtw } v(y) = F(v(x)).$$

Udowodnić, że jeśli funkcja  $F : \omega \rightarrow \omega$  jest definiowalna, to jest też definiowalna funkcja  $G : \omega \rightarrow \omega$  dana wzorem

$$G(n) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = 0, \\ F(G(n-1)) & \text{gdy } n > 0. \end{cases}$$

2. Niech  $\mathcal{A}$  będzie klasą algebr nad pewną algebraiczną sygnaturą  $\Sigma$ . Niech  $\text{Spec}(\mathcal{A})$  oznacza, tak jak niegdyś na kolokwium, *spektrum*  $\mathcal{A}$ , czyli zbiór  $\{n \in \omega \mid \text{istnieje } \mathbb{A} \in \mathcal{A} \text{ takie, że } |\mathbb{A}| = n.\}$ .

Udowodnić, że jeśli  $\mathcal{A}$  jest różniczką algebr, to  $\text{Spec}(\mathcal{A})$  jest zamknięte na mnożenie: jeśli  $m, n \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ , to  $m \cdot n \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ .

Podać przykład takiej klasy algebr  $\mathcal{A}$  nad sygnaturą  $\Sigma$  (która też jest do wyboru), która jest definiowalna, ale jej spektrum nie jest zamknięte na mnożenie.

3. Niech  $\Sigma$  będzie sygnaturą algebraiczną, składającą się z jednego symbolu  $f \in \Sigma_2^F$ . Rozpatrujemy algebrę  $\mathbb{E} = \langle \omega, f^{\mathbb{E}} \rangle$ , gdzie

$$f(x, y) = \begin{cases} x^{2 \cdot y} & \text{gdy } x \neq 0 \text{ lub } y \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \text{ i } y = 0. \end{cases}$$

Napisać taką formułę pierwszego rzędu  $\varphi(x)$  nad  $\Sigma$ , z jedną zmienną wolną  $x$ , która definiuje liczbę 1, t.j., taką, że dla każdego wartościowania  $v : X \rightarrow \omega$  zachodzi  $\mathbb{E} \models \varphi[v]$  wtw  $v(x) = 1$ .

4. Niech dany będzie niesprzeczny, skończony zbiór zdań  $\Delta$  nad pewną ustaloną i również skończoną sygnaturą  $\Sigma$ . Wykazać, że istnieje zbiór  $\Delta_0 \subseteq \Delta$  taki, że  $\Delta_0 \models \Delta$ , a ponadto zdania w  $\Delta_0$  są niezależne: dla każdego  $\varphi \in \Delta_0$  mamy  $\Delta_0 \setminus \{\varphi\} \not\models \varphi$ .

5. Podać charakteryzację zbioru wszystkich liczb kardynalnych (mocy)  $n$  takich, że zachodzi następująca własność:

*Dla każdej sygnatury  $\Sigma$  i każdej klasy  $\mathcal{A}$  struktur nad  $\Sigma$ , jeśli klasa  $\mathcal{A}$  jest aksjomatyzowalna, to jest też aksjomatyzowalna podklasa  $\mathcal{A}$ , składająca się ze struktur mocy nie większej niż  $n$ .*

6. Równość  $s = t$  nad sygnaturą algebraiczną  $\Sigma$  nazywamy *dziwną*, gdy  $FV(s) \cap FV(t) = \emptyset$ , a ponadto żaden z termów  $s, t$  nie jest zmienną.

Przypuśćmy, że  $E$  jest zbiorem wszystkich równości dziwnych nad  $\Sigma$ , oraz że  $\mathbb{A}$  jest algebrą nad  $\Sigma$  taką, że  $\mathbb{A} \models E$ . Udowodnić, że dla każdego  $n \in \omega$  i każdego  $f \in \Sigma_n^F$ ,  $f^{\mathbb{A}}$  jest funkcją stałą. Czy z powyższych założeń wynika też, że  $|A| = 1$ ?

7. Niech  $\varphi$  będzie zdaniem

$$(\forall x f(a_1(x), a_2(x)) = x) \wedge (\forall x \forall y a_1(f(x, y)) = x \wedge a_2(f(x, y)) = y).$$

Czy  $\varphi$  ma model o co najmniej dwóch elementach?

8. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur  $\mathbb{A} = \langle A, E^{\mathbb{A}} \rangle$  nad sygnaturą składającą się z jednego dwuargumentowego symbolu relacyjnego  $E$  i takich, że  $E^{\mathbb{A}}$  jest relacją równoważności, która nie zawiera dwóch klas abstrakcji równej mocy, nie jest aksjomatyzowalna.
9. Niech  $\mathbb{B}$  będzie wolną algebrą Boole'a (t.j., algebrą wolną w klasie wszystkich algebr Boole'a) ze zbiorem wolnych generatorów  $G$  o mocy  $c$ . Jakiej mocy jest zbiór wszystkich podalgebr  $\mathbb{B}$ ?
10. Niech sygnatura algebraiczna  $\Sigma$  zawiera wyłącznie jeden symbol  $f$  operacji jednoargumentowej. Zakładamy, że 3-elementowa algebra  $\mathbb{A}$  nad  $\Sigma$  ma dokładnie dwie kongruencje. Udowodnić, że istnieje pojedynczy element  $x \in A$  taki, który generuje całą algebrę  $\mathbb{A}$ , t.j.,  $[x] = \mathbb{A}$ .