1. Niech $\mathbb{A} = \langle \omega \setminus \{0\}, \mathrm{nwd}^{\mathbb{A}} \rangle$ będzie algebrą, gdzie $\mathrm{nwd} \in \Sigma_2^F$, przy czym dla wszystkich $m, n \in \omega$

$$\mathrm{nwd}^{\mathbb{A}}(m, n) = \text{największy wspólny dzielnik } m \text{ i } n.$$

   Napisać formułę $\varphi(x)$ nad Σ definiującą własność „być liczbą pierwszą", tj., taką, że dla wszystkich wartościowań $v : X \to \omega$

$$\mathbb{X} \models \varphi[v] \quad \text{wtw} \quad v(x) \text{ jest liczbą pierwszą.}$$

2. Niech $\mathbb{Y} = \langle \omega, S^{\mathbb{Y}}, \beta^{\mathbb{Y}}, \leq^{\mathbb{Y}} \rangle$ będzie strukturą nad sygnaturą Σ, która składa się z symboli $S \in \Sigma_1^F$, $\beta \in \Sigma_3^F$ oraz $\leq \in \Sigma_2^R$, przy czym dla każdych $n, t, p, i \in \omega$

$$S^{\mathbb{Y}}(n) = n + 1$$
$$\beta^{\mathbb{Y}}(t, p, i) = \boldsymbol{\beta}(t, p, i),$$

   gdzie $\boldsymbol{\beta}$ to funkcja beta Gödla, znana z wykładu, zaś $\leq^{\mathbb{Y}}$ to zwykła nierówność.

   Napisać formułę $\varphi(x, y, z)$ nad Σ definiującą dodawanie, tj., taką, że dla wszystkich wartościowań $v : X \to \omega$

$$\mathbb{Y} \models \varphi[v] \quad \text{wtw} \quad v(x) + v(y) = v(z).$$

3. Wykazać, że jeśli klasa $\mathcal{A}$ struktur pewnej ustalonej sygnatury Σ nie jest aksjomatyzowalna, to klasa $Mod(\Sigma) \setminus \mathcal{A}$, złożona z wszystkich tych struktur sygnatury Σ, które nie należą do $\mathcal{A}$, nie jest definiowalna.

   Podać taki przykład aksjomatyzowalnej klasy $\mathcal{A}$ nad sygnaturą Σ (którą też można sobie wybrać), że $Mod(\Sigma) \setminus \mathcal{A}$ nie jest aksjomatyzowalna.

4. Przypuśćmy, że Δ jest zbiorem zdań nad sygnaturą Σ, który ma model nieskończony, oraz, że każde dwa przeliczalne modele Δ są izomorficzne (o takich Δ mówi się, że są $\aleph_0$-*kategoryczne*). Udowodnić, że dla każdego zdania φ nad Σ, albo $\Delta \models \varphi$ albo $\Delta \models \neg\varphi$ (innymi słowy, Δ jest zupełny).

5. Równość $s = t$ nazywamy *normalną*, gdy $FV(s) = FV(t)$, tj., w s i t występują dokładnie te same zmienne.

   Przypuśćmy, że E jest zbiorem równości normalnych, oraz że $E \vdash_{eq} s = t$. Udowodnić, że $s = t$ też jest równością normalną.

6. Niech φ będzie zdaniem

$$\forall x \forall y\, (y = f(g(x)) \to (\exists u\, (u = f(x) \wedge y = g(u))))$$

oraz niech ψ będzie zdaniem

$$\forall x\, [f(g(f(x))) = g(f(f(x)))].$$

Czy $\{\psi\} \models \varphi$?

7. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur $\mathbb{A} = \langle A, E^{\mathbb{A}} \rangle$ nad sygnaturą składającą się z jednego dwuargumentowego symbolu relacyjnego E i takich, że $E^{\mathbb{A}}$ jest relacją równoważności, która ma wyłącznie klasy abstrakcji parzystej mocy, nie jest definiowalna.

8. Niech $\mathbb{A}$ będzie algebrą wolną ze zbiorem wolnych generatorów G, w pewnej klasie $\mathcal{A}$. Udowodnić, że dla każdej relacji równoważności $r \subseteq G \times G$ istnieje kongruencja $\bar{r} \subseteq A \times A$ taka, że $\bar{r} \cap (G \times G) = r$. (Można to wyrazić stwierdzeniem, że r roszerza się do kongruencji w $\mathbb{A}$.)

   Wykorzystując przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{R}$ jako przykład, udowodnić, że może istnieć wiele różnych kongruencji $\bar{r}$, rozszerzających daną relację równoważności r w G.

9. Opisać wszystkie kongruencje algebry $\mathbb{A} = \langle \{0,1,2,3\}, \min^{\mathbb{A}}, \max^{\mathbb{A}} \rangle$, gdzie $\min, \max \in \Sigma_2^F$, a $\min^{\mathbb{A}}, \max^{\mathbb{A}}$ są odpowiednio operacjami maksimum i minimum.

10. Niech $\mathbb{P} = \langle \mathcal{P}(\omega), \cap^{\mathbb{P}}, \cup^{\mathbb{P}} \rangle$ będzie kratą podzbiorów ω ze zwykłymi działaniami teoriomnogościowymi. Udowodnić, że $\mathbb{P} \times \mathbb{P} \cong \mathbb{P}$.