

1 Rozmaitości i tw. Birkhoffa

1. Czy klasa wszystkich ciał nad sygnaturą $\Sigma_0^F = \{0, 1\}$, $\Sigma_1^F = \{-\}$, $\Sigma_2^F = \{+, *\}$, po dodaniu algebr jednoelementowych nad Σ , jest rozmaitością?
2. Czy klasa krat zupełnych, rozpatrywanych jako struktury algebraiczne nad $\Sigma_2^F = \{\vee, \wedge\}$, jest rozmaitością?
3. Czy klasa \mathcal{F} wszystkich ciał skończonej charakterystyki jest rozmaitością?
4. Pokazać, że każda klasa algebr, zamknięta na produkty uogólnione, podalgebry i dzielenie przez kongruencje, jest aksjomatyzowalna przez zbiór równości.
5. Czy istnieje algebra niejednoelementowa, którą można opisać z dokładnością do izomorfizmu zbiorem równości? Dokładnie: czy istnieje algebra niejednoelementowa \mathbb{A} i zbiór równości E nad sygnaturą \mathbb{A} takie, że $Mod(E) = \{\mathbb{B} / \mathbb{B} \cong \mathbb{A}\}$?
6. Udowodnić, że dla dowolnego zbioru W algebr nad wspólną sygnaturą, istnieje najmniejsza (ze względu na zawieranie) rozmaitość V taka, że $W \subseteq V$.
7. Niech V będzie najmniejszą rozmaitością zawierającą algebra \mathbb{A} . Udowodnić, że każda algebra $\mathbb{B} \in V$ spełnia dokładnie te same równości, co \mathbb{A} .
8. Pokazać, że jeśli sygnatura Σ zawiera tylko jeden symbol operacji, i ta operacja jest jednoragumentowa (o takich sygnaturach mówimy, że są monounarne), oraz V jest rozmaitością algebr nad Σ , to V jest definiowalna pojedynczą równością.
9. Niech $p(x)$ będzie termem z jedną zmienną wolną x , oraz niech Δ będzie zbiorem równości, oba nad sygnaturą Σ . Pokazać, że jeśli $\Delta \models p(x) = x$ oraz $\Sigma \models p(x) = p(y)$, to $\Delta \models x = y$, i w konsekwencji $Mod(\Delta)$ składa się wyłącznie z algebr jednoelementowych.

2 Kongruencje

1. Wyznaczyć kratę kongruencji czteroelementowej algebry Boole'a $\langle \mathcal{P}(\{0, 1\}), \cap, \cup, -, \emptyset, \{0, 1\} \rangle$.

2. Czy każda kongruencja w każdej algebrze zawsze zawiera co najmniej jedną klasę abstrakcji, która jest podalgebrą (tak, jak to jest w wypadku grup czy przestrzeni liniowych)?
3. Czy każda podalgebra jest zawsze klasą abstrakcji pewnej kongruencji (tak jak to jest w wypadku przestrzeni liniowych)? Czy odpowiedź zmieni się, jeśli założymy, że sygnatura składa się tylko z symboli funkcji jednoargumentowych i stałych?
4. Rozważmy relację r w zbiorze $\mathcal{P}(A)$, gdzie A jest pewnym zbiorem, określoną następująco: $x r y$ wtw $|x| = |y|$. Czy r jest relacją kongruencji w algebrze Boole'a $\langle \mathcal{P}, \cap, \cup, -, A, \emptyset \rangle$? Jeśli tak, to proszę opisać algebrę ilorazową.
5. Udowodnić, że w dowolnym ciele \mathbb{K} są tylko dwie kongruencje.
6. Rozważmy algebrę $\langle \omega, S, P, 0 \rangle$, gdzie $S(x) = x + 1$ oraz

$$P(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$
 Udowodnić, że w tej algebrze istnieją tylko dwie kongruencje.
7. Rozważmy algebrę $\langle Z, S, P, 0 \rangle$, gdzie Z to zbiór liczb całkowitych, $S(x) = x + 1$ oraz $P(x) = x - 1$. Opisać wszystkie kongruencje w tej algebrze.
8. Podać przykład algebry \mathbb{A} (sygnatura też jest do wyboru) takiej, że istnieje w niej kongruencja r , różna od identyczności, spełniająca $\mathbb{A}/r \cong \mathbb{A}$.
9. Pokazać, że krata kongruencji $Con(\mathbb{A})$ każdej algebry \mathbb{A} , spełniającej warunki zadania 8, zawiera nieskończony łańcuch.
10. Czy jeśli krata kongruencji $Con(\mathbb{A})$ pewnej algebry \mathbb{A} zawiera nieskończony łańcuch, to ta algebra musi spełniać warunki zadania 8?
11. Niech $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ będzie homomorfizmem, oraz niech r będzie relacją kongruencji w \mathbb{B} . Pokazać, że relacja $\vec{h}^{-1}(r) = \{ \langle a, a' \rangle \in A \times A \mid h(a) r h(a') \}$ jest relacją kongruencji w \mathbb{A} .
12. Udowodnić, że przy założeniach i oznaczeniach zadania 11, jeśli h jest epimorfizmem, to $\mathbb{B}/r \cong \mathbb{A}/\vec{h}^{-1}(r)$. Jak można osłabić założenie epimorficzności h tak, aby teza nadal zachodziła?

3 Algebry wolne

1. Przypuśćmy, że algebra \mathbb{A} jest wolna w klasie algebr \mathcal{A} ze zbiorem wolnych generatorów G . Pokazać, że każde przekształcenie $h : G \rightarrow B$ w uniwersum dowolnej algebry $\mathbb{B} \in \mathcal{A}$ ma dokładnie jedno homomorficzne przedłużenie $\bar{h} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$.
2. Przypuśćmy, że algebra \mathbb{A} jest wolna w klasie algebr \mathcal{A} ze zbiorem wolnych generatorów G . Obliczyć moc zbioru wszystkich homomorfizmów $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ (takie homomorfizmy nazywamy endomorfizmami).
3. Pokazać, że dwie algebry wolne w tej samej klasie nad zbiorami wolnych generatorów tej samej mocy, są izomorficzne.
4. Pokazać, że algebra wolna w klasie wszystkich algebr nad sygnaturą Σ o n wolnych generatorach (to określa tę algebrę z dokładnością do izomorfizmu, patrz zadanie 3), jest izomorficzna z $FT(\Sigma, \{x_1, \dots, x_n\})$.
5. Pokazać, że algebra $\langle \mathcal{P}(\{0, 1\}^n), \cup, \cap, -, \{0, 1\}^n, \emptyset \rangle$ jest wolna w klasie algebr Boole'a nad zbiorem wolnych generatorów $\{A_1, \dots, A_n\}$, gdzie $A_i = \{\alpha \in \{0, 1\}^n / \alpha(i) = 1\}$.

Wskazówka: Niech $h : A_i \mapsto b_i \in \mathbb{B}$, gdzie \mathbb{B} to dowolna algebra Boole'a. Określamy $\bar{h} : \{\alpha\} \mapsto c_1 \wedge \dots \wedge c_n$, gdzie

$$c_i = \begin{cases} b_i & \text{jeśli } \alpha(i) = 1, \\ 1^{\mathbb{B}} -^{\mathbb{B}} b_i & \text{jeśli } \alpha(i) = 0, \end{cases}$$

oraz $\bar{h} : \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \mapsto \bar{h}(\alpha_1) \vee \dots \vee \bar{h}(\alpha_k)$. Trzeba pokazać, że \bar{h} jest żądanym homomorficznym rozszerzeniem h (uwaga: dużo liczenia!).

6. Przestrzeń liniowa \mathbb{V} nad ciałem \mathbb{K} to algebra $\mathbb{V} = \langle V, +^{\mathbb{V}}, 0^{\mathbb{V}}, (a \cdot^{\mathbb{V}})_{a \in \mathbb{K}} \rangle$, gdzie każda z operacji jednoargumentowych $a \cdot^{\mathbb{V}}$ jest operacją mnożenia przez skalar a z ciała \mathbb{K} . (Oczywiście operacje te muszą spełniać znane aksjomaty.) Udowodnić, że każda przestrzeń liniowa nad \mathbb{K} jest wolna w klasie przestrzeni liniowych nad \mathbb{K} , ze zbiorem wolnych generatorów będącym dowolną bazą.
7. Pokazać, że ciało \mathbb{R} liczb rzeczywistych nie jest wolne w żadnej klasie algebr nad żadnym zbiorem wolnych generatorów, w odróżnieniu od jednowymiarowej przestrzeni liniowej \mathbb{R}^1 nad \mathbb{R} .

4 Homomorfizmy, izomorfizmy, podalgebry

1. Algebra \mathbb{A} nad Σ zawiera zero, jeśli istnieje $e \in A$ takie, że dla każdego n i każdego $f \in \Sigma_n^F$, $f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) = e$ zawsze, gdy $a_i = e$ dla pewnego i .
 - (a) Pokazać, że jeśli \mathbb{A} ma zero, oraz $\mathbb{A} \cong \mathbb{B} \times \mathbb{C}$, to \mathbb{B} i \mathbb{C} mają zero.
 - (b) Pokazać, że jeśli \mathbb{A} ma zero e , oraz $h : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ jest epimorfizmem, to $\vec{h}^{-1}(\{e\})$ jest podalgebrą w \mathbb{B} .
 - (c) Pokazać, że jeśli \mathbb{A}_i ma zero dla $i \in \mathcal{I}$, to $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{A}_i$ zawiera podalgebrę izomorficzną z \mathbb{A}_i , dla każdego $i \in \mathcal{I}$.
2. Niech \mathbb{A}, \mathbb{B} będą dwiema algebrami tej samej sygnatury. Czy jeśli istnieją monomorfizmy $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ i $g : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$, to $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$?
3. Rozważmy podalgebry algebry $\langle Q, + \rangle$, generowane odpowiednio przez zbiory (a) $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, (b) $\{-1, 0, 1\}$, (c) Q , (d) $\{0, 1\}$. Które spośród nich są izomorficzne?
4. Podać przykład homomorfizmu z algebry $\langle \{1, \dots, n\}^*, \cdot, \epsilon \rangle$, gdzie \cdot to konkatenacja słów oraz ϵ to słowo puste, w algebrę $\langle \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}, \cup, \emptyset) \rangle$. Opisać wszystkie homomorfizmy idące w przeciwnym kierunku.

Wskazówka: Skorzystać z faktu, że w obrazie homomorfizmu muszą być prawdziwe wszystkie równości z algebry będącej jego dziedziną.
5. Pokazać, że jeśli $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ jest homomorfizmem, $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ jest epimorfizmem, oraz $\ker(h) \subseteq \ker(g)$, to istnieje homomorfizm $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ taki, że $g = k \circ h$.
6. Skonstruować dwie algebry \mathbb{A}, \mathbb{B} tej samej sygnatury, takie, że zbiory homomorfizmów $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ i $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ są oba puste.