Zadania przygotowawcze z logiki

Wersja 2.

22 września 2000

O zadaniach. Zadania są podzielone na kilka grup. Niektóre zadania są dosyć trudne. Pewne zadania powtarzają się w kilku grupach, aby zachęcić studentów do rozwiązania ich różnymi metodami.
Przy niektórych zadaniach (z działów ,,Tw. o zwartości" i ,,Tw. Skolema-Löwenheima") należy się posłużyć pełną wersją twierdzenia Skolema-Löwenheima poniżej, która zostanie podana na najbliższym wykładzie:
Jeśli Δ jest zbiorem zdań nad sygnaturą Σ który ma nieskończony model, to Δ ma model dowolnej mocy $\mathfrak{m} \geq |\Sigma|$.

Formalizowanie zadanych własności. Spektrum $Spec(\varphi)$ zdania φ to zbiór wszystkich liczb naturalnych n takich, ze φ ma model o mocy n. Standardowy model arytmetyki to struktura $\mathbb{N} = \langle \omega, *^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, \leq^{\mathbb{N}} \rangle$.

1. Podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że $Spec(\varphi) = Spec(\neg\varphi)$.

2. Podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że $Spec(\varphi) = \{n^2 \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

3. Podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że $Spec(\varphi) = \{2 * n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

4. Podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że $Spec(\varphi) = \{n \ / \ n \in \mathbb{N}$ i n jest liczbą złożoną$\}$.

5. Podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że $Spec(\varphi) = \{2^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

6. Podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że dla każdego naturalnego n, φ ma dokładnie n nieizomorficznych modeli mocy n.

7. Podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że dla każdego naturalnego n, φ ma dokładnie 2^n nieizomorficznych modeli mocy n.

8. Podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że dla każdego naturalnego n, φ ma dokładnie $n!$ nieizomorficznych modeli mocy n.

9. Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$, podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że dla każdego naturalnego n, φ ma dokładnie $\binom{n}{k}$ nieizomorficznych modeli mocy n.

10. Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$, podać przykład zdania φ (sygnatura też jest do wyboru) takiego, że dla każdego naturalnego n, φ ma dokładnie n^k nieizomorficznych modeli mocy n.

11. Znaleźć formułę $\varphi(x, y)$ stwierdzającą w standardowym modelu arytmetyki, że x jest względnie pierwsze z y.

12. Znaleźć formułę $\varphi(x, y, z)$ stwierdzającą w standardowym modelu arytmetyki, że z jest największym wspólnym dzielnikiem x i y.

13. Znaleźć formułę $\varphi(x, y, z)$ stwierdzającą w standardowym modelu arytmetyki, że y jest największą liczbą, będącą potęgą liczby pierwszej, która dzieli x.

Szukanie modeli dla zadanych formuł. W zadaniach ,,Pokazać, że zbiór zdań Δ jest niezależny", należy za każdym razem udowodnić, że dla każdego $\varphi \in \Delta$, $\Delta \setminus \{\varphi\} \not\models \varphi$, poprzez wskazanie modelu $\Delta \setminus \{\varphi\}$, który nie jest modelem φ.

1. Pokazać, że zbiór aksjomatów relacji równoważności

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall x \forall y (Exy \to Eyx) \\ \forall x\ Exx \\ \forall x \forall y \forall z ((Exy \wedge Eyz) \to Exz) \end{array} \right\}$$

jest niezależny.

2. Pokazać, że zbiór aksjomatów liniowych porządków

$$\left\{\begin{array}{c} \forall x \forall y((x \leq y) \vee (y \leq x)) \\ \forall x \forall y((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y) \\ \forall x \forall y \forall z((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z) \end{array}\right\}$$

jest niezależny.

3. Pokazać, że zbiór aksjomatów teorii grup (w zapisie multiplikatywnym, nad sygnaturą $\Sigma_2^F = \{*\}, \Sigma_0^F = \{1\}$)

$$\left\{\begin{array}{c} \forall x((1 * x = x) \wedge (x * 1 = x)) \\ \forall x \forall y \forall z((x * y) * z = x * (y * z)) \\ \forall x \exists y((x * y = 1) \wedge (y * x = 1)) \end{array}\right\}$$

jest niezależny.

4. Pokazać, że zdanie $(\forall x \exists y\ Exy) \rightarrow (\exists x \forall y\ Exy)$ nie jest tautologią.

5. Pokazać, że zdanie

$$(\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y))) \rightarrow (\forall x \exists y(f(y) = x))$$

nie jest tautologią. Czy jego negacja ma model skończony?

6. Pokazać, że zdanie $\exists x \exists y \exists u \exists v((\neg u = x) \vee (\neg v = y)) \wedge (f(x,y) = f(u,v))$ nie jest tautologią. Ile nieizomorficznych modeli skończonych ma to zdanie?

Tw. Fraïssé, gra Ehrenfeuchta.

1. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur $\mathbb{A} = \langle A, r^{\mathbb{A}} \rangle$, gdzie $r \in \Sigma_1^R$ oraz takich, że $|r^{\mathbb{A}}| = |A \setminus r^{\mathbb{A}}|$ nie jest aksjomatyzowalna.

2. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur $\mathbb{A} = \langle A, E^{\mathbb{A}} \rangle$ nad sygnaturą składającą się z jednego dwuargumentowego symbolu relacyjnego E i takich, że $|\{(a,b) \in A \times A\ /\ (a,b) \in E^{\mathbb{A}}\}| < |\{(a,b) \in A \times A\ /\ (a,b) \notin E^{\mathbb{A}}\}|$, nie jest aksjomatyzowalna.

3. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur $\mathbb{A} = \langle A, E^{\mathbb{A}} \rangle$ nad sygnaturą składającą się z jednego dwuargumentowego symbolu relacyjnego E i takich, że $E^{\mathbb{A}}$ jest zbiorem skończonym, nie jest definiowalna.

4. Pokazać, że klasa wszystkich relacji równoważności, które mają skończenie wiele klas abstrakcji, nie jest aksjomatyzowalna.

Tw. o zwartości.

1. Pokazać, że jeśli klasa $\mathcal{A}$ struktur nad sygnaturą Σ jest aksjomatyzowalna i jej dopełnienie $Mod(\Sigma) \setminus \mathcal{A}$ struktur sygnatury Σ, ktore nie należą do $\mathcal{A}$, jest aksjomatyzowalne, to obie klasy są w istocie definiowalne.

   Wskazówka: Założyć, że pierwsza klasa jest aksjomatyzowalna przez Δ, a druga przez Δ', ale żaden skończony podzbiór Δ nie jest aksjomatyzacją $\mathcal{A}$. Pokazać, że $\Delta \cup \Delta'$ spełnia założenia tw. o zwartości.

2. Pokazać następujące tw. Robinsona: Jeśli Δ, Δ' są spełnialnymi zbiorami zdań nad pewną sygnaturą Σ, zaś $\Delta \cup \Delta'$ nie jest spełnialny, to istnieje zdanie φ takie, że $\Delta \models \varphi$ oraz $\Delta' \models \neg\varphi$.

   Wskazówka: Założyć, że dla każdego φ takiego, że $\Delta \models \varphi$ zachodzi $\Delta \not\models \neg\varphi$. Pokazć, że w tej sytuacji $\Delta \cup \{\varphi\}$ jest spełnialny, a stąd, że $\Delta \cup \Delta'$ spełnia zalożenia tw. o zwartości.

3. Pokazać, że jeśli Δ jest pewnym zbiorem zdań φ takich, że $Spec(\neg\varphi)$ jest skończone, oraz $\Delta \models \psi$, to także $Spec(\neg\psi)$ jest skończone.

4. Pokazać, że klasa wszystkich relacji równoważności, które mają skończenie wiele klas abstrakcji, nie jest aksjomatyzowalna.

5. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur $\mathbb{A} = \langle A, E^{\mathbb{A}} \rangle$ nad sygnaturą składającą się z jednego dwuargumentowego symbolu relacyjnego E i takich, że $E^{\mathbb{A}}$ jest zbiorem skończonym, nie jest aksjomatyzowalna.

6. Pokazać, że klasa wszystkich algebr $\mathbb{A} = \langle A, f^{\mathbb{A}} \rangle$, gdzie f jest symbolem jednoragumentowej funkcji, oraz takich, że $|\vec{f}(A)| < |A|$ nie jest aksjomatyzowalna.

7. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur $\mathbb{A} = \langle A, E^{\mathbb{A}} \rangle$ nad sygnaturą składającą się z jednego dwuargumentowego symbolu relacyjnego E i takich, że $|\{(a, b) \in A \times A \ / \ (a, b) \in E^{\mathbb{A}}\}| < |\{(a, b) \in A \times A \ / \ (a, b) \notin E^{\mathbb{A}}\}|$, nie jest aksjomatyzowalna.

8. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur $\mathbb{A} = \langle A, r^{\mathbb{A}} \rangle$, gdzie $r \in \Sigma_1^R$ oraz takich, że $|r^{\mathbb{A}}| = |A \setminus r^{\mathbb{A}}|$ nie jest aksjomatyzowalna.

Tw. Skolema-Löwenheima.

1. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur $\mathbb{A} = \langle A, r^{\mathbb{A}} \rangle$, gdzie $r \in \Sigma_1^R$ oraz takich, że $|r^{\mathbb{A}}| = 2^{|A \setminus r^{\mathbb{A}}|}$ nie jest aksjomatyzowalna.

2. Udowodnić, że klasa wszystkich struktur izomorficznych do struktury postaci $\mathbb{A} = \langle \mathcal{P}(A), \cup^{\mathbb{A}}, \cap^{\mathbb{A}}, \subseteq^{\mathbb{A}} \rangle$, gdzie $\cup^{\mathbb{A}}, \cap^{\mathbb{A}}$ oraz $\subseteq^{\mathbb{A}}$ są odpowiednio prawdziwymi sumą, przecięciem i zawieraniem zbiorów, nie jest aksjomatyzowalna.

3. Udowodnić następujące tw. Hessenberga: Dla każdej nieskończonej mocy $\mathfrak{m}$ zachodzi $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.

   Wskazówka: Napisać zdanie pierwszego rzędu, z którego wynika, że uniwersum modelu jest mocy nie mniejszej niż moc jego kartezjańskiego kwadratu. Pokazać, że zdanie to ma model nieskończony i skorzystać z tw. Skolema-Löwenheima.