Egzamin z logiki, 06/09/2001

1. Niech Σ będzie sygnaturą składającą się z jednego jednoargumentowego symbolu funkcyjnego f. Udowodnić, że każda algebra $\mathbb{A}$ sygnatury Σ o więcej niż jednym elemencie ma nietrywialny (tzn. różny od identyczności) homomorfizm $h : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

2. Niech zbiór X będzie spektrum zdania φ sygnatury Σ, tzn., niech $X = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \text{istnieje struktura } \mathbb{A} \text{ nad } \Sigma \text{ t.że } |A| = n \text{ i } \mathbb{A} \models \varphi\}$.

   Udowodnić, że zbiór $\{m+n \ / \ m, n \in X\}$ też jest spektrum pewnego zdania ψ (w konstrukcji wolno powiększyć sygnaturę o nowe symbole).

3. a) Skonstruować algebrę $\mathbb{A}$ i klasę algebr $\mathcal{A}$ takie, że $\mathbb{A}$ jest wolna w $\mathcal{A}$ nad dwoma różnymi niepustymi zbiorami wolnych generatorów G_1, G_2 takimi, że $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

   b) Skonstruować algebrę $\mathbb{A}$ i klasę algebr $\mathcal{A}$ takie, że $\mathbb{A}$ jest wolna w $\mathcal{A}$ nad dokładnie jednym niepustym zbiorem wolnych generatorów.

4. Niech $\mathcal{C}$ będzie klasą wszystkich grafów, skończonych i nieskończonych, które są n-dzielne, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Graf $\mathbb{G}$ jest n-dzielny jeśli istnieje podział jego zbioru wierzchołków G na niepuste i rozłączne podzbiory $G_1, \ldots, G_n$ tak, że każda z podstruktur indukowanych $\mathbb{G}_{|G_i}$ nie zawiera żadnych krawędzi. Przykładowo, graf pełny o n wierzchołkach $\mathbb{K}_n$ jest n-dzielny, ale nie m-dzielny dla $m < n$.

   Udowodnić, że klasa $\mathcal{C}$ nie jest definiowalna.

5. Niech $\mathbb{W} = \langle \{0,1\}^+, \circ^{\mathbb{W}}, 0^{\mathbb{W}}, 1^{\mathbb{W}}, r^{\mathbb{W}} \rangle$ będzie strukturą, w której $\{0,1\}^+$ to zbiór wszystkich niepustych skończonych ciągów zerojedynkowych, $\circ^{\mathbb{W}}$ to operacja konkatenacji ciągów ($\langle x_1 \ldots x_n \rangle \circ^{\mathbb{W}} \langle y_1 \ldots y_m \rangle = \langle x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m \rangle$, $0^{\mathbb{W}}$ i $1^{\mathbb{W}}$ to ciągi jednoelementowe $\langle 0 \rangle$ i $\langle 1 \rangle$, zaś $r^{\mathbb{W}}$ jest relacją jednoargumentową określoną przez $r^{\mathbb{W}}(w)$ wtw. gdy każdy prefiks w zawiera nie więcej jedynek niż zer, a w całym ciągu w ilość jednek i zer jest jednakowa.

   Udowodnić, że

$$\begin{aligned}\mathbb{W} \models \forall x([\exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \, x = (y_1 \circ y_2) \circ y_3] \to \\ [r(x) \to \exists((y \exists z \, (r(y) \wedge r(z) \wedge x = y \circ z)) \vee x = (0 \circ y)) \circ 1)].\end{aligned}$$

6. Niech $\mathbb{N}$ będzie standardowym modelem arytmetyki, nad standardową sygnaturą, składającą się z symboli $+, *, 0, 1, \leq$.

   Napisać formułę $\varphi(x)$ nad sygnaturą arytmetyki definiującą relację „x ma nieparzystą ilość cyfr w rozwinięciu dziesiętnym”, tzn. taką, że dla wszystkich wartościowań $v : X \to \omega$ zachodzi równoważność $\mathbb{N} \models \varphi[v]$ wtw $v(x)$ ma nieparzystą ilość cyfr w rozwinięciu dziesiętnym.

7. Niech $\mathbb{Z}_8 = \langle\{0, 1, \dots, 7\}, S^{\mathbb{Z}_8}, 0^{\mathbb{Z}_8}\rangle$, gdzie $S^{\mathbb{Z}_8}$ jest operacją następnika modulo 8, zaś $0^{\mathbb{Z}_8}$ to 0.

   Proszę opisać wszystkie kongruencje algebry $\mathbb{Z}_8$.

8. Niech sygnatura algebraiczna Σ składa się z symboli stałych a, b, c i nie zawiera innych symboli. Niech $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ będą dwuelementowymi algebrami sygnatury Σ takimi, że $a^{\mathbb{A}} = b^{\mathbb{A}} \neq c^{\mathbb{A}}$, zaś $a^{\mathbb{B}} \neq b^{\mathbb{B}} = c^{\mathbb{B}}$. Udowodnić, że każda rozmaitość algebr nad Σ zawierająca jednocześnie $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ zawiera wszystkie algebry nad Σ.

9. Niech c, d będą dwoma symbolami pewnej sygnatury algebraicznej Σ, która poza tym może zawierać także inne symbole funkcyjne, o różnych ilościach argumentów. Zbiór E równości nad Σ nazwiemy *symetrycznym*, gdy każda równość $t = s$ należy do E wtedy i tylo wtedy, gdy równość otrzymana z $t = s$ przez (jednoczesną) zamianę wystąpień c na d oraz d na c, też należy do E.

   Udowodnić, że jeśli zbiór równości E nad Σ jest symetryczny, to zbiór $\{t = s \;/\; E \models t = s\}$ też jest symetryczny.

10. Rozstrzygnąć, czy $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \models \{\psi_1, \psi_2\}$.

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &: \ \forall x_1 \forall x_2\, E(x_1, x_2) \to E(x_2, x_1) \\
\varphi_2 &: \ \forall x\, \neg E(x, x) \\
\varphi_3 &: \ \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \bigwedge_{1 \le i < j \le 5} x_i \neq x_j \\
\psi_1 &: \ \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\, E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_1) \\
\psi_2 &: \ \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\, \neg(E(x_1, x_2) \vee E(x_2, x_3) \vee E(x_3, x_1))
\end{aligned}
$$

Czas na rozwiązanie zadań to 3 godziny od chwili ich rozdania. Wolno używać dowolnych notatek i podręczników, natomiast nie wolno ściągać.

Wszystkie zadania są oceniane w skali 0-1-2-3 punkty, przy czym **ważne jest uzasadnienie odpowiedzi**. *Na piątkę trzeba 10 punktów (w tym 4 zadania na co najmniej 2 punkty), na czwórkę 8 punktów (w tym co najmniej 3 zadania na co najmniej 2 punkty), a na trójkę 5 punktów (w tym co najmniej 2 zadania na co najmniej 2 punkty lub jedno zadanie na 3 punkty).* **Każdej osobie, która odda więcej niż cztery zadania, do wyniku zostaną policzone najsłabsze cztery spośród nich, tak więc nie opłaca się oddawać więcej niż czterech zadań.**

Każde zadanie proszę napisać na osobnej kartce, podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.