1 Ćwiczenia 01.03.2016 – zrobiliśmy

Zadanie 1. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, będzie zbiorem otwartym oraz niech $u \in C^2(U)$ będzie funkcją harmoniczną. Wówczas

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy \tag{1.1}$$

dla wszystkich kul $B(x,r) \subset U$.

Zadanie 2. Niech U – j.w. oraz niech $u \in C^2(U)$ spełnia równość (1.1) dla wszystkich kul $B(x,r) \subset U$. Wówczas u jest funkcją harmoniczną.

Zadanie 3. Rozważamy zagadnienie

$$\partial_t u + b\nabla u = f, \qquad \text{w } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{1.2}$$

$$u = g, \qquad \text{na } r^n \times \{t = 0\}. \tag{1.3}$$

Przedstawić jawny wzór na rozwiązanie tego zagadnienia przy założeniu, że g i f są „dostatecznie regularne".

Zadanie 4. Rozwiązać następujące równanie:

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u, \quad u(x_1, 1) = g(x_1).$$

Uwaga 1.1. W Zadaniu 1 przydatne było:

- Twierdzenie Stokesa (w prostszej wersji czyli jeden z tzw. wzorów Greena):

  $$\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

  gdzie $u \in C^2(\bar{U})$ oraz $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ jest pochodną u w kierunku normalnym do brzegu U.

- $|B(x,r)| = \omega_n r^n$, gdzie ω_n jest pewną stałą zależną od wymiaru,

- $\partial |B(x,r)| = \omega_n n r^{n-1}$.

- Definicja funkcji harmonicznej: $u \in C^2$:

  $$\Delta u := \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0.$$

- $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$.

2 Na 08.03.2016 – praca domowa

Zadanie 5.

- Czy w Zadaniu 2 założenie, że $u \in C^2(U)$ jest konieczne? Jeśli nie to jak można je osłabić?
- Podać możliwie minimalne założenia na g i f gwarantujące istnienie rozwiązań zagadnienia z Zadania 3.

Zadanie 6. Rozwiązać zagadnienia:

(a)

$$uu_{x_1} + u_{x_2} = 1, \quad u(x_1, x_1) = \frac{1}{2}x_1.$$

(b)

$$x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u, \quad u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$$