

Powiększanie i zmniejszanie, czyli jednokładności

1. Prostokąt przykryto 25 kołami o promieniu 2. Czy da się go przykryć 100 kołami o promieniu 1?
2. Udowodnij, że środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok.
3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie P . Wykaż, że środki ciężkości trójkątów ABP , BCP , CDP i DAP tworzą równoległobok.
4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Wpisz w ten trójkąt taki prostokąt o stosunku boków $3 : 1$, by jego dwa sąsiednie wierzchołki, wyznaczające dłuższy z boków, należały do boku AB trójkąta, a pozostałe dwa wierzchołki należały odpowiednio do boków BC i CA trójkąta.
5. Dany jest kąt wypukły α i punkt B należący do wnętrza tego kąta. W kąt α wpisz okrąg, przechodzący przez punkt B .
6. Dane są okręgi o_1, o_2 styczne wewnętrznie w punkcie S , o_2 wewnątrz o_1 , oraz cięciwa AB okręgu o_1 styczna do o_2 w punkcie C . Wykaż, że $\angle CSA = \angle CSB$.
7. Rozłączne zewnętrznie okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B . Prosta k , nie rozdzielająca okręgów o_1 i o_2 , jest do nich styczna w punktach odpowiednio P i Q . Wykaż, że proste AP i BQ przecinają się w punkcie należącym do okręgu o .
8. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie P , a proste zawierające jego ramiona przecinają się w punkcie Q . Wykaż, że prosta PQ przechodzi przez środki podstaw trapezu.
9. (*Prosta Eulera*) W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, punkt S jest środkiem ciężkości, a punkt H jest ortocentrum. Wykaż, że punkty O, S, H leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej i że zachodzi równość $SH = 2 \cdot SO$.
10. Dane są trzy okręgi O_1, O_2 i O_3 , parami styczne zewnętrznie: okręgi O_1 i O_2 w punkcie R , okręgi O_1 i O_3 w punkcie Q , okręgi O_2 i O_3 w punkcie P . Prosta PQ przecina okrąg O_1 w punktach Q i S , zaś prosta PR w punktach R i T . Prosta QT przecina okrąg O_3 w punktach Q i U , zaś prosta RS przecina O_2 w punktach R i V . Udowodnij, że punkty P, U, V są współliniowe.
11. Okrąg o przecina bok AB trójkąta ABC w punktach P_1, P_2 , bok BC w punktach R_1 i R_2 oraz bok AC w punktach S_1 i S_2 . Proste prostopadłe do AB przechodzące przez P_1 i P_2 oznaczamy odpowiednio k_1 i k_2 , prostopadłe do BC przechodzące przez R_1 i R_2 oznaczamy l_1 i l_2 , zaś prostopadłe do AC przechodzące przez S_1 i S_2 oznaczamy m_1 i m_2 . Wykaż, że jeśli proste k_1, l_1 i m_1 przecinają się w jednym punkcie, to proste k_2, l_2 i m_2 również przecinają się w jednym punkcie.