Geometria z algebrą liniową I

1. Układy równań liniowych. Rozwiązanie ogólne. Macierze. Operacje elementarne na wierszach macierzy. Postać schodkowa zredukowana. Zastosowanie do rozwiązywania układów równań. (1 wykład)

2. Ciała. Ciało liczb zespolonych. Postać trygonometryczna liczb zespolonych. Pierwiastki wielomianów. Zasadnicze twierdzenie algebry (bez dowodu). Pierwiastki z jedynki. Ciała Z_p. (2 wykłady)

3. Przestrzenie liniowe. Podprzestrzenie. Kombinacje liniowe, przestrzenie rozpięte na układach wektorów. Układy liniowo niezależne. Twierdzenie Steinitza o wymianie. Bazy. Istnienie baz. Wymiar przestrzeni liniowej. Współrzędne wektora w bazie. Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego. Opisywanie podprzestrzeni układami równań liniowych. Podprzestrzenie $V_1 \cap V_2$ i $V_1 + V_2$; $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$. Wewnętrzna suma prosta $V = V_1 \oplus V_2$. (4 wykłady)

4. Przekształcenia liniowe. Działania na przekształceniach liniowych (dodawanie, mnożenie przez skalar, składanie), przestrzeń przekształceń liniowych $L(V, W)$. Homotetie, rzuty i symetrie równoległe. Zadawanie przekształcenia przez wartości na bazie. Jądro i obraz przekształcenia. Monomorfizmy, epimorfizmy, izomorfizmy. Każda n-wymiarowa przestrzeń liniowa nad K jest izomorficzna z K^n. Jeśli $\varphi : V \to W$, to $\dim V = \dim \ker\varphi + \dim \operatorname{im}\varphi$. Macierz przekształcenia liniowego. Działania na macierzach, własności. Macierze odwracalne. (4 wykłady)

5. Wyznaczniki. Własności wyznaczników. Obliczanie za pomocą operacji elementarnych. Rozwinięcia Laplace'a. Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników. Zastosowania wyznaczników, związki z rzędem i z odwracalnością macierzy. Wzory Cramera na rozwiązanie układu n równań liniowych z n niewiadomymi. Wzór permutacyjny na wyznacznik. (3 wykłady)

Proponowane podręczniki:
1. G.Banaszak, W.Gajda, Elementy algebry liniowej.
2. A.Białynicki-Birula, Algebra liniowa z geometrią.
3. T.Koźniewski, Wykłady z algebry liniowej.

4. M.Moszyńska, J.Święcicka, Geometria z algebrą liniową.
5. K.Sieklucki, Geometria i topologia.

Geometria z algebrą liniową II

1. Endomorfizmy przestrzeni liniowych. Macierz endomorfizmu w bazie, zależność od bazy, macierze podobne ($B = C^{-1}AC$). Wyznacznik i ślad endomorfizmu. Wektory, podprzestrzenie i wartości własne. Wielomian charakterystyczny. Macierze diagonalne, endomorfizmy i macierze diagonalizowalne, kryteria diagonalizowalności. Twierdzenie Jordana o postaci kanonicznej macierzy endomorfizmu (bez dowodu). (4 wykłady)

2. Przestrzenie afiniczne w przestrzeniach liniowych - warstwy podprzestrzeni liniowych. Kombinacje afiniczne. Układy afinicznie niezależne, bazy punktowe. Współrzędne w bazie punktowej. Układy bazowe przestrzeni afinicznych (punkt i baza przestrzeni stycznej), parametryzacje. Przekształcenia afiniczne, odpowiadające im przekształcenia liniowe. Macierze przekształceń afinicznych (w układach bazowych). Izomorfizmy przestrzeni afinicznych. Każda n-wymiarowa przestrzeń afiniczna nad K jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną K^n. Aksjomatyczna definicja przestrzeni afinicznej. (4 wykłady)

3. Funkcjonały (formy) liniowe, przestrzenie sprzężone (dualne). Bazy sprzężone, współrzędne funkcjonału w bazie sprzężonej, izomorfizm $V \to V^*$ dla V skończenie wymiarowej. Przekształcenia sprzężone, ich macierze w bazach z sprzężonych. (2 wykłady)

4. Iloczyny skalarne. Nierówność Schwarza. Przestrzenie euklidesowe liniowe. Dopełnienie prostopadłe podprzestrzeni. Rzuty i symetrie prostopadłe. Bazy prostopadłe (ortogonalne) i ortonormalne, współrzędne wektora w takich bazach. Ortogonalizacja Grama-Schmidta. Kryterium Sylvestera dodatniej określoności. Macierz Grama i jej własności. (4 wykłady)

5. Przestrzenie euklidesowe afiniczne. Odległość punktów w przestrzeniach euklidesowych, odległość punktu od podprzestrzeni. Miary w przestrzeniach euklidesowych, objętości równoległościanów i sympleksów. Kąty. Orientacja. Iloczyn wektorowy. (2 wykłady)

6. Przekształcenia przestrzeni euklidesowych zachowujące iloczyn skalarny, izomorfizmy przestrzeni euklidesowych. Macierze ortogonalne. Izometrie. Przekształcenia samosprzężone. Diagonalizacja symetrycznych macierzy rzeczywistych za pomocą macierzy ortogonalnych. (3 wykłady)

7. Iloczyny hermitowskie. Izomorfizmy przestrzeni z formą hermitowską, macierze unitarne. (1 wykład)

8. Formy dwuliniowe, formy symetryczne. Macierz formy dwuliniowej w bazie, zależność od bazy, kongruencja macierzy ($B = C^T AC$, dla odwracalnej macierzy C). Formy nieosobliwe. Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni z formą nieosobliwą. Bazy prostopadłe. Każda skończenie wymiarowa przestrzeń z formą dwuliniową symetryczną nad ciałem charakterystyki różnej od 2 ma bazę prostopadłą. Twierdzenie Sylvestera o bezwładności. Klasy kongruencji macierzy symetrycznych nad R i C. Formy kwadratowe i metody ich diagonalizacji. (3 wykłady)

9. Wielomiany i funkcje wielomianowe n-zmiennych. Funkcje wielomianowe na przestrzeniach afinicznych. Zbiory algebraiczne, hiperpowierzchnie, stopień hiperpowierzchni. Hiperpowierzchnie afinicznie izomorficzne. Nad ciałem nieskończonym K, charakterystyki różnej od 2, każdą hiperpowierzchnię stopnia 2 w K^n można opisać, w pewnym układzie bazowym, równaniem postaci $a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c = 0$ lub równaniem $a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n = 0$, gdzie $r < n$. Klasyfikacja afiniczna hiperpowierzchni stopnia 2 w C^n i w R^n. Opis przypadków R^2 i R^3. Klasyfikacja izometryczna hiperpowierzchni stopnia 2 w R^n (bez dowodu). (4 wykłady)

Proponowane podręczniki:

1. G.Banaszak, W.Gajda, Elementy algebry liniowej.
2. A.Białynicki-Birula, Algebra liniowa z geometrią.
3. T.Koźniewski, Wykłady z algebry liniowej.
4. M.Moszyńska, J.Święcicka, Geometria z algebrą liniową.
5. K.Sieklucki, Geometria i topologia.