Uniwersytet Warszawski

Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki

Marcin Stalij

Nr albumu: 171863

Struktura kombinatoryczna stożków krzywych i stożków dywizorów szerokich na gładkich powierzchniach Del Pezzo

Praca magisterska

na kierunku **MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem

dr hab. Jarosława A. Wiśniewskiego

Instytut Matematyki

25 kwiecień, 2001

Pracę przedkładam do oceny

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Streszczenie : Używając ogolnego aparatu teorii Mori znajdujemy słaby typ kombinatoryczny stożków krzywych i dywizorów szerokich powierzchni Del Pezzo. To pozwala nam wyznaczyć ilość (-1) – krzywych oraz ilość nierównoważnych ściągnięć na $\mathbf{P}^1$ oraz $\mathbf{P}^2$.

Słowa kluczowe : powierzchnie Del Pezzo, wielościany, odwzorowania holomorficzne, ściągnięcia Mori, stożek krzywych, stożek dywizorów szerokich, równania Dehna – Sommerville'a

Klasyfikacja tematyczna wg AMS Math.Subj.Class. 2000 :14E30, 52B05, 14J26, 14J45

0. Wstęp.

Powierzchnie Del Pezzo są klasycznymi obiektami badań w teorii powierzchni algebraicznych. Są wśród nich tak znane przykłady jak kubika (czyli powierzchnia stopnia 3) w $\mathbf{P}^3$ (i jej słynne 27 linii). Inne przykłady to podwójne nakrycie $S_2 \to \mathbf{P}^2$ rozgałęzione wzdłuż kwartyki, $S_6 \subset \mathbf{P}^6$– przekrój $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^7$ generyczną hiperpłaszczyzną $\mathbf{P}^6$ oraz zupełne przecięcie dwóch kwadryk w $\mathbf{P}^4$. Podobnie jak kubika w $\mathbf{P}^3$ jest rozdmuchaniem sześciu punktów na $\mathbf{P}^2$ tak pozostałe powierzchnie del Pezzo można otrzymać jako rozdmuchania $\mathbf{P}^2$ w $k = 0, \ldots, 8$ punktach w położeniu dostatecznie ogólnym, za wyjątkiem $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, która też jest powierzchnią Del Pezzo.

Powierzchnie Del Pezzo (z definicji) to jedyne powierzchnie, których wiązka antykanoniczna $-K_X$ jest szeroka, gdzie przez $-K_X$ rozumiemy wiązkę dualną do wiązki $det\Omega^1_X$. Wobec tego w podejściu do problemu klasyfikacji rozmaitości algebraicznych opartym na numerycznych własnościach K_X, jak na przykład teorii dołączania czy teorii Mori, powierzchnie Del Pezzo ogrywają bardzo ważną rolę.

Klasycznym problemem geometrii enumeratywnej, stymulowanym przez przykład kubiki w $\mathbf{P}^3$ i jej 27 linii, jest pytanie: ile krzywych wyjątkowych jest na danej powierzchni Del Pezzo ? Problem ten rozwiązuje się klasycznie korzystając z geometrycznego opisu powierzchni Del Pezzo jako kubiki w $\mathbf{P}^3$, przecięcia dwóch kwadryk w $\mathbf{P}^4$ etc.Manin w [Ma] odpowiada na to pytanie korzystając z opisu geometrycznego powierzchni Del Pezzo jako rozdmuchania $\mathbf{P}^2$ w odpowiedniej ilości punktów. Dzięki temu może wprowadzić odpowiednio wybraną bazę w $Pic(X)$ i rozwiązać równania diofantyczne, wynikające z zapisu we współrzędnych warunku na bycie (-1)–krzywą. W ten sposób znajduje ilość (-1)–krzywych, zwracając przy okazji uwagę na na ciekawe związki tychże z systemami pierwiastków.

Ciekawy kierunek rozwoju badań proponuje Nikulin [N], badając własności geometryczne powierzchni, w szczególności własności ich stożków krzywych, korzystając z metryki Łobaczewskiego na $N_1(X)$.

W niniejszej pracy patrzymy na powierzchnie Del Pezzo z punktu widzenia teorii Mori. Każdej powierzchni Del Pezzo możemy przyporządkować dwa wielościany, będące przekrojami hiperpłaskimi stożka krzywych i stożka dywizorów szerokich, które oznaczamy odpowiednio Γ i Δ. Γ i Δ są dualne do siebie w odpowiednim sensie. Używając klasycznych wyników teorii Mori analizujemy strukturę relatywnych stożków ściągnięć, co pozwala nam wyznaczyć związki rekurencyjne pomiędzy ilościami ścian wielościanów Δ w kolejnych wymiarach. Aby powiązać te informacje ze sobą, wprowadzamy wielomian charakterystyczny danego wielościanu, którego współczynniki to liczby ścian w odpowiednich wymiarach. Otrzymane zależności rekurencyjne tłumaczą się na równanie różniczkowe, które wraz z dodatkowymi warunkami brzegowymi związanymi z charakterystyką Eulera wielościanu pozwalają nam jednoznacznie wyznaczyc owe wielomiany. Co za tym idzie, potrafimy też wyznaczyć kombinatoryczną strukturę powyższych wielościanów. Dosyć zaskakujące jest to, że na gruncie rozważań czysto kombinatorycznych otrzymujemy twierdzenie o nieistnieniu wielościanów Δ oraz Γ w wymiarze 9 i wyżej.

W szczególności, jako zastosowanie, otrzymujemy ilość nierównoważnych ściągnięć danej powierzchni Del Pezzo na $\mathbf{P}^2$ i $\mathbf{P}^1$ oraz ilość (-1)–krzywych na niej.

1. Podstawowe informacje.

1.1. Krzywe algebraiczne i powierzchnie.

W całej pracy używamy standardowych oznaczeń z [H], lub standardowych oznaczen z teorii Mori, które wprowadzamy w tym rozdziale.

Przez n–wymiarową przestrzeń rzutową $\mathbf{P}^n$ rozumiemy projektywizację pierścienia wielomianów od $n+1$ zmiennych nad ustalonym algebraicznie domkniętym cialem k charakterystyki 0 , $\mathbf{P}^n = \mathbf{Proj}(k[x_0, \ldots, x_n])$. Przez schemat rzutowy rozumiemy domknięty podschemat $\mathbf{P}^n$. Przez rozmaitość rozumiemy całkowity, rozdzielczy schemat skończonego typu nad cialem k . Rozmaitość nazywamy nieosobliwą, jeżeli pierścienie lokalne wszystkich punktów są pierścieniami regularnymi.

Na nieosobliwej rozmaitości X możemy zdefiniować lokalnie wolny snop różniczek Ω^1_X oraz snop kanoniczny $\omega_X = det \Omega^1_X$. Klasę liniowej równoważności dowolnego dywizora, który odpowiada snopowi ω_X oznaczamy K_X. Nadużywając notacji będziemy pisali K_X zamiast ω_X, jeżeli tylko nie prowadzi to do nieporozumień.

Dla dowolnej rozmaitości X możemy zdefiniować grupę dywizorów Cartier którą będziemy dalej oznaczali $Pic(X)$. Pokazuje się, ze na $\mathbf{P}^n$ każdy dywizor Cartier jest postaci $\mathcal{O}(l)$ dla pewnej liczby całkowitej l, zatem $Pic(\mathbf{P}^n) \simeq Z$.

Przez krzywą rozumiemy rozmaitość wymiaru 1, przez powierzchnię rozmaitość wymiaru 2.

Jeżeli C jest krzywą gladką rzutową, to liczbę $g = dimH^0(\Omega^1_X)$ nazywamy genusem krzywej C.

Będziemy potrzebować dwóch faktów dotyczących krzywych:

Stwierdzenie. ([H], s.296) Niech C będzie gładką krzywą rzutową, K_C–dywizorem kanonicznym, g–genusem krzywej C. Wówczas $degK_C = 2g - 2$.

Stwierdzenie. Niech $f : X \to Y$ będzie morfizmem niestałym, Y–krzywą normalną. Jeżeli $X \simeq \mathbf{P}^1$, to $Y \simeq \mathbf{P}^1$.

Dowód. Gdyby $Y \not\simeq \mathbf{P}^1$, to na X mielibyśmy niezerową 1–formę, cofniętą z Y, co jest niemożliwe.

Jeżeli C jest krzywą gładką zawartą w gładkiej powierzchni rzutowej S, to możemy w łatwy sposób obliczyć dywizor kanoniczny krzywej C.

Twierdzenie Niech S, C jak wyżej. Wówczas $K_C \simeq K_{S|C} \otimes \mathcal{O}_S(C)_{|C}$. W szczególności $degK_C = K_S \cdot C + C^2$.

Przykład 1. Rozdmuchanie punktu. Dla rozdmuchania prawdziwe są następujące fakty [Ma]:

Twierdzenie . (o rozdmuchaniu) Niech $f : X' \to X$ będzie rozdmuchaniem punktu na gładkiej powierzchni X, z dywizorem wyjątkowym E. Wówczas f indukuje zanurzenie grup Picarda $f^* : Pic(X) \to Pic(X')$, przy tym:

1. $Pic(X') = f^*Pic(X) \oplus \mathbf{Z}[E]$, gdzie E jest dywizorem wyjątkowym rozdmuchania.
2. $\forall \quad L_1, L_2 \in Pic(X)$ mamy $f^*(L_1) \cdot f^*(L_2) = L_1 \cdot L_2$.
3. $\forall L \in Pic(X) \quad f^*(L) \cdot E = 0$.
4. $K_{X'} = f^*K_X + E$.

Uwaga Przez (-1) – krzywą na gładkiej powierzchni rzutowej S będziemy rozumieli nieprzywiedlną krzywą C taką że $C \simeq \mathbf{P}^1$ oraz $C \cdot K_S = -1$. Klasyczne twierdzenie Castelnuovo–Enriquesa ([KM], s.8) mówi, że jeżeli na powierzchni S istnieje (-1)–krzywa C, to S jest rozdmuchaniem nieosobliwej powierzchni rzutowej T w punkcie p oraz C jest dywizorem wyjątkowym rozdmuchania.

Twierdzenie (Kryterium Nakai - Moishezona) ([H] s.365) Dywizor D na powierzchni X jest szeroki $\iff \quad D^2 > 0$ i $D \cdot C > 0$ dla wszystkich krzywych nieredukowalnych $C \subset X$.

1.2. Stożki, struktury kombinatoryczne i f–wektory.

W tym rozdziale wprowadzimy podstawowe definicje i fakty dotyczące stożków i wielościanów. Ogólne referencje to [MS] oraz [G].

Definicja . Niech $k = \mathbf{Q}$ lub $\mathbf{R}$, niech N będzie przestrzenią wektorową nad k. Podzbiór $\sigma \subset N$ nazywamy stożkiem, jeżeli $0 \in \sigma$ oraz σ jest zamknięty ze względu na mnożenie przez nieujemne skalary i dodawanie.
Stożek σ jest skończenie generowany (wielościenny), jeżeli istnieje skończenie wiele elementów $s_1, \ldots, s_k$ takich że $\sigma = \mathbf{R}^+ s_1 + \ldots + \mathbf{R}^+ s_k$, oznaczmy to $\sigma = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle$. Wymiar skończenie generowanego stożka σ to wymiar najmniejszej podprzestrzeni liniowej zawierającej σ. W niniejszej pracy wszystkie stożki są wielościenne.

Definicja . Przez wielościan wypukły rozumiemy powłokę wypukłą skończonej ilości punktów. Wymiar wielościanu wypukłego to, jak wyżej, wymiar najmniejszej podprzestrzeni afinicznej zawierającej ten wielościan.

Podstożek $\tau \subset \sigma$ nazywamy podstożkiem ekstremalnym, lub ścianą stożka σ, jeżeli $u, v \in \sigma$ oraz $u + v \in \tau$ pociąga $u, v \in \tau$. Jednowymiarowy podstożek ekstremalny nazywamy promieniem ekstremalnym.

Wybierzmy taką hiperpłaszczyznę $H \subset N$, która przecina każdy promień ekstremalny stożka σ w dokładnie jednym punkcie. Przecięcie $\overline{\sigma} = H \cap \sigma \subset H$ jest wielościanem wypukłym. Każda ściana stożka σ jest wyznaczona przez hiperpłaszczyznę podpierającą, a zatem wyznacza ścianę wielościanu $\overline{\sigma}$ i na odwrót, przy czym zachowane są relacje inkluzji.

Wprowadzimy teraz dwa bardzo użyteczne pojęcia:

Stwierdzenie–Definicja.([MS], s.56) Niech P będzie wielościanem r wymiarowym i niech $\mathcal{F}(P)$ oznacza zbiór wszystkich ścian P wraz ze ścianami niewłaściwymi $\emptyset$ i P. Wówczas $\mathcal{F}(P)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym i posiada naturalną strukturę skoćzonej kraty. $\mathcal{F}(P)$ nazywamy kratą ścian wielościanu P. Operacje dodawania i mnożenia definiujemy następująco: $F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$ oraz $F_1 \vee F_2 =$ najmniejsza ściana zawierająca F_1 i F_2.

Definicja . Dwa wielościany P_1 i P_2 nazywamy kombinatorycznie równoważnymi, jeżeli ich kraty $\mathcal{F}(P_1)$ i $\mathcal{F}(P_2)$ są izomorficzne.

Pojęciem blisko związanym z pojęciem struktury kombinatorycznej jest pojęcie f–wektora.

Definicja . f–wektorem lub słabą strukturą kombinatoryczną r wymiarowego wielościanu P nazywamy ciąg liczb $f(P) = \big(f_0(P), f_1(P), \ldots, f_{r-1}(P)\big) \in \mathbf{R}^r$.

Okazuje się, że szczególnie wygodnie jest patrzeć na f–wektor jako na ciąg współczynników pewnego wielomianu

Definicja . Wielomianem charakterystycznym wielościanu P nazywamy wielomian

$$W_P(x) = 1 + f_0(P) \cdot x + f_1(P) \cdot x^2 + \cdot + f_{r-1}(P) \cdot x^r.$$

Definicja . Wielościan P^* nazywamy wielościanem dualnym do wielościanu P, jeżeli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zbiorem ścian P i zbiorem ścian P^*, która odwraca relację inkluzji. Innymi słowy, kraty $\mathcal{F}(P)$ oraz $\mathcal{F}(P^*)$ są antyizomorficzne.

Załóżmy, że mamy niezdegenerowany iloczyn skalarny $N \times N \to \mathbf{R}$, gdzie N jest przestrzenią skończenie wymiarową, $\sigma \in N$ – stożkiem wielościennym wymiaru $n = dimN$. Wówczas możemy zdefiniować stożek dualny $\sigma^* \subset N$ jako

$$\sigma^* = \{m \in N : \langle m, u \rangle \geq 0 \quad \text{dla każdego } u \in \sigma\}.$$

Załóżmy, że stożek σ jest wymiaru $n = dimN$, $\sigma =< s_1, \dots s_k >$. Wówczas wprost z definicji $\sigma^* = \{m \in M : \langle m, s_i \rangle \geq 0 \quad \forall i\}$. Ponadto ścianie τ wymiaru r w stożku σ odpowiada ściana $\tau^\vee \in \sigma^*$ wymiaru $n - r$ w następujący sposób: ściana wymiaru r w σ to przecięcie $n - r$ hiperpłaszczyzn $H_1, \dots, H_{n-r}$ z σ. Wobec tego ściana do niej dualna jest przecięciem stożka $\sigma^\vee$ ze ścianą generowaną przez $n - r$ elementów. Jak widać, jeżeli τ_1 i τ_2 są ścianami σ oraz $\tau_1 \subset \tau_2$ to $\tau_2^* \subset \tau_1^*$.

Wybierzmy, jak wyżej, taką hiperpłaszczyznę $H \subset N$, która przecina każdy promień ekstremalny stożka σ w dokładnie jednym punkcie. Dla dowolnej hiperpłaszczyzny $\widetilde{H} \subset N$ przecinającej każdą krawędź σ^* dokładnie w jednym punkcie wielościan $\sigma^* \cap \widetilde{H}$ będziemy nazywać wielościanem dualnym do $\overline{\sigma}$ i oznaczać $\overline{\sigma}^*$.

Widzimy, że spełnione są pewne relacje incydencji: informacja o tym, że ściana τ wymiaru r ma k ścian $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ wymiaru s dualnie tłumaczy się na to, że w ścianie $\tau^\vee$ wymiaru $n - r$ schodzi się k ścian $\gamma_1^\vee, \dots, \gamma_k^\vee$ wymiaru $n - s$ (to znaczy, że ściana $\tau^\vee$ jest zawarta w dokładnie k ścianach $\gamma_1^\vee, \dots, \gamma_k^\vee$).

Jeżeli σ jest stożkiem wymiaru $r + 1$ w $r + 1$-wymiarowej przestrzeni N, $\overline{\sigma}$– odpowiadającym mu wielościanem wymiaru r, to dowolnej i– wymiarowej ścianie $\overline{\tau} \subset \overline{\sigma}$ odpowiada $r - i - 1$– wymiarowa ściana $\overline{\tau}^\vee \subset \overline{\sigma}^*$. W szczególności wierzchołkom $\overline{\sigma}$ odpowiadają ściany kowymiaru 1 w $\overline{\sigma}^*$.

Definicja . Wielościan $\overline{\sigma}$ wymiaru r nazywamy symplicjalnym jeżeli każda jego ściana jest symplicjalna, symplicjalnym w kowymiarze 1, jeżeli każda jego ściana wymiaru mniejszego niż $r - 1$ jest symplicjalna, zaś kosymplicjalnym w kowymiarze 1, jeżeli $\overline{\sigma}^*$ jest symplicjalny w kowymiarze 1.

Wszystkie wielościany, jakie będziemy rozważali w niniejszej pracy będą symplicjalne (lub kosymplicjalne) w kowymiarze 1. Będą one w dodatku bardzo blisko wielościanów symplicjalnych w tym sensie, że jedyne ich ściany niesymplicjalne będą wielościanami krzyżowymi, to znaczy

Definicja Wielościan P wymiaru r nazywamy r–oktahedronem, lub r–wielościanem krzy-żo-wym, jeżeli P jest powłoką wypukłą punktów $\pm e_1, \dots, \pm e_r$, gdzie $e_1, \dots, e_r$ są liniowo niezależnymi wektorami.

Stwierdzenie. ([MS] s.78) Wielomian charakterystyczny r–oktahedronu to $(1+2x)^r$

1.3 Teoria Mori.

Niech X będzie rozmaitością rzutową. 1– cyklem nazywamy formalną kombinację liniową nieprzywiedlnych, zredukowanych krzywych na X: $C = \sum a_i C_i, \quad a_i \in \mathbf{Z}$. 1– cykl nazywamy efektywnym, jeżeli $\forall i \quad a_i \geq 0$.

Dwa cykle C, C' nazywamy numerycznie równoważnymi, jeżeli dla każdego dywizora Cartier D jest $C \cdot D = C' \cdot D$.

1– cykle o współczynnikach w $\mathbf{R}$ modulo numeryczna równoważność stanowią przestrzeń liniową nad $\mathbf{R}$. Oznaczamy ją $N_1(X)$.

Niech $NS(X)$ oznacza grupę Nerona - Severiego rozmaitości X, to jest grupę dywizorów modulo numeryczna równoważność. Przecięcie dywizorów i krzywych daje nam odwzorowanie dwuliniowe

$$N_1(X) \times (NS(X) \otimes \mathbf{R}) \to \mathbf{R}.$$

Twierdzenie Nerona - Severiego o bazie ([H], s.367) stanowi, że $N_1(X)$ jest skończenie wymiarowa. Jej wymiar nazywamy liczbą Picarda rozmaitości X i oznaczamy przez $\rho(X)$.

Uwaga . Na gładkich powierzchniach wymiernych liniowa równoważność dywizorów to to samo, co ich numeryczna równoważność.

Uwaga . Jeżeli X jest powierzchnią gładką, to podrozmaitości wymiaru 1 i kowymiaru 1 są takie same, mamy zatem naturalne utożsamienie $N_1(X) = (NS(X) \otimes \mathbf{R})$.

Oznaczmy przez $NE(X) = \{\sum a_i[C_i] : \quad C_i \subset X, 0 \leq a_i \in \mathbf{R}\} \subset N_1(X)$ stożek cykli efektywnych, przez $\overline{NE}(X)$– jego domknięcie w $N_1(X)$. Przez $\mathcal{D}(X)$ oznaczmy dualny do niego stożek dywizorów numerycznie efektywnych.

Pierwszym wynikiem strukturalnym, jaki przytoczymy będzie

Twierdzenie . (Mori o stożku) ([M1]) Niech X będzie nieosobliwą rozmaitością rzutową. Wówczas istnieje przeliczalnie wiele krzywych wymiernych $L_i \subset X$ takich, że $0 < -L_i \cdot K_X \leq dim X + 1$ oraz

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_i \mathbf{R}^+[L_i],$$

gdzie $\mathbf{R}^+[L_i]$ są rozłącznymi promieniami ekstremalnymi $\overline{NE}(X)$, które leżą w półprzestrzeni $N_1(X)_{K_X<0}$, ponadto promienie te są lokalnie dyskretne w półprzestrzeni $N_1(X)_{K_X<0}$. ∎

Definicja . Gładką rozmaitość rzutową nazywamy rozmaitością Fano, jeżeli dywizor $-K_X$ jest szeroki.

Uwaga. Jeżeli X jest Fano, to stożek $\overline{NE}(X) - \{0\}$ zawiera się w $N_1(X)_{K_X<0}$. Wobec tego zbiór promieni ekstremalnych jest skończony, jako że jest zwarty i dyskretny. Zatem twierdzenie o stożku daje

$$\overline{NE}(X) = NE(X) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{R}^+[L_i].$$

W szczególności $NE(X)$ jest domknięty.

Aby związać ten stożek z geometrią rozmaitości X, będzie nam potrzebna następująca

Definicja . Niech X będzie nieosobliwą rozmaitością rzutową, $F \subset \overline{NE}(X)$ będzie ścianą ekstremalną. Morfizm $\phi_F : X \to Z$ nazywamy ściągnięciem F, jeżeli

1. $\phi_F(C) = *$ dla nieprzywiedlnej krzywej $C \subset X \iff [C] \in F$, gdzie przez $*$ rozumiemy punkt,

2. $(\phi_F)_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$.

Definicja . Jeżeli $\phi : X \to Y$ jest morfizmem z nieosobliwej rozmaitości X na rozmaitość normalną Y, to przez $NE(\phi)$ oznaczamy stożek zawarty w $N_1(X)$, generowany przez krzywe ściągane do punktu przez ϕ.

Twierdzenie . (O ściągnięciu) ([KM]) Niech X będzie nieosobliwą rozmaitością rzutową, R będzie promieniem ekstremalnym takim, że $K_X \cdot R < 0$. Wówczas istnieje ściągnięcie $\phi_R : X \to Y$. Ponadto ma miejsce któryś z przypadków:

1. $dimX > dimY$ (ściągnięcie włókniste),

2. ϕ_R jest biwymierne i zbiór wyjątkowy $Ex(\phi_R)$ jest nieprzywiedlnym dywizorem (ściągnięcie dywizorialne),

3. ϕ_R jest biwymierne i $Ex(\phi_R)$ ma kowymiar ≥ 2 (małe ściągnięcie).

Mamy też ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow Pic(Y) \xrightarrow{\phi_R^*} Pic(X) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

gdzie ostatnia strzałka przeprowadza $[L] \in Pic(X)$ na $L \cdot C$ – przecięcie L z krzywą wymierną generującą promień R.

Twierdzenie ([M2], s.21) Jeżeli X jest rozmaitością Fano, to odwzorowanie $\phi \to NE(\phi)$ ustala bijekcję pomiędzy ścianami ekstremalnymi stożka $NE(X)$ oraz ściągnięciami rozmaitości X, to znaczy morfizmami $\phi : X \to Y$ na rozmaitość normalną Y takimi że $\phi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, oraz $-K_X$ jest $\phi-$ szeroki.

W szczególności dla teorii powierzchni z teorii Mori wynikają następujące fakty:

Definicja . Nieosobliwa powierzchnia rzutowa X jest minimalna, jeżeli na X nie ma (-1)–krzywych

Twierdzenie . ([M2], s.20) Niech X będzie nieosobliwą powierzchnią rzutową. Jeżeli X jest minimalna, to jedno z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe:

1. K_X jest numerycznie efektywny

2. X ma strukturę $\mathbf{P}^1$– wiązki nad krzywą

3. $X \simeq \mathbf{P}^2$

Twierdzenie (o klasyfikacji promieni ekstremalnych)([M2], s.22) Niech X będzie gładką nieosobliwą powierzchnią rzutową taką że K_X nie jest nef. Niech R bedzie promieniem ekstremalnym. Wówczas jedno z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe:

1. $R = \mathbf{R}_+[E]$ dla pewnej (-1)–krzywej E na X

2. X jest $\mathbf{P}^1$– wiązka nad krzywą oraz jej włókno F generuje R, tak że $R = \mathbf{R}_+[F]$

3. $R = NE(X)$ oraz $X \simeq \mathbf{P}^2$.

Uwaga (O osobliwościach włókien). Jak pisze M.Reid w [R], s.69 w przypadku powierzchni prostokreślnych można dodatkowo ograniczyć osobliwości włókien:

1) Jeżeli $-K_X$ jest relatywnie szeroki, to $f : X \to \mathbf{P}^1$ jest wiązką konik. Każde włókno osobliwe f jest parą linii– sumą dwóch (-1)– krzywych $L_1 \cup L_2$ przecinających się transwersalnie w punkcie

2) Jeżeli $-K_X$ jest relatywnie szeroki oraz każda krzywa we włóknie jest (z dokładnością do numerycznej równoważności) krotnością włókna, to f jest $\mathbf{P}^1$– wiązką. W szczególności, każde włókno jest nieosobliwe.

2. Gładkie powierzchnie Del Pezzo.

Definicja . Gładką powierzchnię rzutową nazywamy powierzchnią Del Pezzo, jeżeli dywizor antykanoniczny $-K_X$ jest szeroki.

Uwaga . Powierzchnie Del Pezzo to dwuwymiarowe przykłady rozmaitości Fano. Każda powierzchnia Del Pezzo jest wymierna.

Twierdzenie . [Ma] Niech X będzie gładką powierzchnią Del Pezzo, przez d oznaczmy stopień tej powierzchni, $d = K_X^2$. Wowczas:

1. $1 \leq d \leq 9$

2. Każda nieredukowalna krzywa z ujemnym samoprzecięciem jest (-1)–krzywą

3. Jeżeli na X nie ma (-1)– krzywych, to albo $d = 9$ i $X \simeq \mathbf{P}^2$ albo $d = 8$ i $X \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

Dowód. (szkic)

1. Jeżeli $X^{'} \to X$ jest rozdmuchaniem punktu na gładkiej, rzutowej, wymiernej powierzchni X, to z twierdzenia o rozdmuchaniu

$$K_{X'}^2 = K_X^2 - 1$$

zatem zdania

$$Pic(X) \text{ jest grupą wolną skończenie generowaną oraz } rkPic(X) + {K_X}^2 = 10$$

oraz

$$Pic(X^{'}) \text{ jest grupą wolną skończenie generowaną oraz } rkPic(X^{'}) + {K_{X'}}^2 = 10$$

są równoważne. Ponieważ X jest powierzchnią wymierną, wystarczy je udowodnić dla dowolnego modelu minimalnego X, na przykład dla $\mathbf{P}^2$. W tym przypadku $K_{\mathbf{P}^2} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3)$, $\quad Pic(\mathbf{P}^2) \simeq Z$ i powyższe zdania są prawdziwe. Wobec tego $1 \leq {K_X}^2 \leq 9$.

2. Niech $C \subset X$ będzie nieredukowalną krzywą taką że $C^2 < 0$. Jak wiemy

$$2g(C) - 2 = K_X \cdot C + C^2, \quad g(C) \geq 0$$

zatem musi być $g(C) = 0, C^2 = -1$. W szczególności $C \simeq \mathbf{P}^1$.

3. Jeżeli na X nie ma krzywych wyjątkowych, to X jest modelem minimalnym na którym nie ma (na mocy 2.) krzywych o ujemnym samoprzecięciu. Jedyne wymierne powierzchnie minimalne o tej własności to $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

Twierdzenie . [Ma] Niech X będzie jak wyżej. Wówczas:

1. Jeżeli $d = 9$ to $X \simeq \mathbf{P}^2$

2. Jeżeli $d = 8$ to $X \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ lub X jest izomorficzna z $Bl(\mathbf{P}^2)$, czyli $\mathbf{P}^2$ rozdmuchanym w jednym punkcie

3. Jeżeli $1 \leq d \leq 7$ to X jest izomorficzna z $\mathbf{P}^2$ rozdmuchanym w $9-d$ punktach, z których żadne trzy nie leżą na linii oraz żadnych sześć nie leży na konice. Na odwrót, każda taka powierzchnia jest powierzchnią Del Pezzo.

Oznaczmy przez $\mathcal{S}_r$ klasę powierzchni S_r, będących rozdmuchaniami $\mathbf{P}^2$ w $2 \leq r \leq 8$ punktach, spelniających powyższe warunki ogólności. Rozważmy klasę $\mathcal{S}$ rozmaitości w skład której wchodzą powierzchnie $\mathcal{S}_r$ oraz $\mathbf{P}^2, Bl(\mathbf{P}^2), \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ oraz prosta $\mathbf{P}^1$. Oznaczmy też przez Γ_r wielościan będący hiperpłaskim cięciem stożka krzywych $NE(S_r)$ zaś przez Δ_r wielościan do niego dualny, będący cięciem stożka dywizorów.

Pierwszym krokiem, by zbadać strukturę Γ_r jest identyfikacja jego wierzchołków.

Twierdzenie . Wierzchołki wielościanu Γ_r są stowarzyszone z (-1)– krzywymi na $\mathcal{S}_r$.

Dowód. Z twierdzenie o klasyfikacji promieni ekstremalnych albo wszystkie promienie są generowane przez (-1)–krzywe, albo $X \simeq \mathbf{P}^2$, albo X jest $\mathbf{P}^1$– wiązką nad krzywą. Druga i trzecia możliwość nie mogą się realizować, bo dla $r \geq 2$ zachodzi $\rho(S_R) > 2$.

Widzimy, że wierzchołki Γ_r odpowiadają (-1) krzywym na X jeżeli $\rho > 2$, krzywym z zerowym samoprzecięciem dla $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, krzywej z samoprzecięciem 0 i (-1)-krzywej dla $\mathbf{P}^2$ rozdmuchanego w jednym punkcie lub krzywej z samoprzecięciem 1 dla $\mathbf{P}^2$.

Naturalne jest pytanie o ilość tych wierzchołków.

Manin w [Ma] udziela na nie odpowiedzi wprowadzając w $Pic(X)$, dla X– powierzchni Del Pezzo (różnej od $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$) stopnia d wolną bazę $(L_0, \ldots, L_r)$, gdzie $r = 9 - d$ taką że:

1. $K_X = -3L_0 + \sum_{i=1}^r L_i$

2. $(L_0, L_0) = 1, \quad (L_i, L_i) = -1$ dla $i \geq 1, (L_i, L_j) = 0$dla $i \neq j$. Następnie tłumaczy warunek $L \in \{L \in Pic : (L, K_X) = 0, (L, L) = -2\}$ na język współrzędnych w powyższej bazie. Jeżeli przyjąć $L = aL_0 - \sum_{i=1}^r b_i L_i$ to równania diofantyczne, jakie otrzymuje mają postać:

$$3a - \sum_{i=1}^{r} b_i = 0, \quad a^2 - \sum_{i=1}^{r} b_i^2 = -2$$

Rozwiązując te równania, otrzymuje ilość elementów w powyższym zbiorze i korzystając z tego, wyznacza ilość elementów zbioru $\{L \in Pic : (L, K_X) = (L, L) = -1\}$, czyli ilość krzywych wyjątkowych na X. W dalszej części pracy zaprezentujemy inne podejście do tego problemu.

Z twierdzenia Mori każdej ścianie stożka $\overline{NE}(X)$ odpowiada morfizm $X \to X'$. Pokażemy teraz, że ta procedura nie wyprowadza nas poza klasę $\mathcal{S}$.

Po pierwsze, zauważmy, że dla $X = \mathbf{P}^2$ jest $\rho = 1$ i jedyne ściągnięcie jakie mamy to morfizm stały $X \to *$. Dla $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ jest $\rho = 2$ i stożek $\overline{NE}(X)$ jest generowany przez dwa (różne) ściągnięcia na $\mathbf{P}^1$. Dla $X = Bl(\mathbf{P}^2)$ ponownie $\rho = 2$ i stożek $\overline{NE}(X)$ jest generowany przez ściągnięcie (-1)-krzywej i morfizm $X \to \mathbf{P}^1$ pochodzący od (0)-krzywej. Dla powierzchni z klasy $\mathcal{S}$ dla których $\rho > 2$ mamy następujące

Twierdzenie . Niech $\phi : S_r \to S$ będzie morfizmem biwymiernym na powierzchnię normalną S. Wówczas S jest gladką powierzchnią Del Pezzo i ϕ jest ściągnięciem $\rho(S_r) - \rho(S)$ rozłącznych (-1)-krzywych.

Dowód. Niech $NE(\phi)$ będzie relatywnym stożkiem przekształcenia ϕ. $NE(\phi)$ jest ekstremalny jest zatem generowany przez (-1)-krzywe $E_1, \ldots, E_k$. Pokażemy, że te krzywe są rozlączne.

Przypuśćmy, bez straty ogólności, że $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ i przefaktoryzujmy morfizm ϕ przez ściągnięcie krzywej E_1:

$$\begin{array}{ccccc} & S_r & \xrightarrow{\pi_1} & S'_r & \\ \phi & \downarrow & & \downarrow & \phi' \\ & S & = & S & \end{array}$$

Niech $\overline{E_2}$ oznacza obraz krzywej E_2, m – krotność $\overline{E_2}$ w $x = \pi_1(E_1)$. $\overline{E_2}$ jest krzywą wyjątkową z twierdzenia Artina ([R], s.103) ponieważ jest ściągana przez morfizm $\phi^{'}$. Ponieważ ${\pi_1}^*\overline{E_2} = E_2 + mE_1$, to ${E_2}^2 = \pi^*\overline{E_2}^2 - m^2$ i ostatecznie $\pi^*\overline{E_2}^2 = {E_2}^2 + m^2 \geq 0$ jeżeli tylko $m \geq 1$, co dawałoby sprzeczność z wyjątkowością. Wobec tego krzywe E_1 i E_2 są rozłączne. Mozemy więc rozłożyć ϕ na k ściągnięć:

$$S_r \xrightarrow{\phi_1} S_{r-1} \xrightarrow{\phi_2} S_{r-2} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\phi_k} S_{r-k}$$

Przy każdym ściągnięciu ranga grupy Picarda spada o jeden, zatem $\rho(S_k) = k + \rho(S)$, czyli $\rho(S_k) - \rho(S) = k$. Oczywiście S jest powierzchnią gladką. Jeżeli $S_r \to S$ jest ściągnięciem k (-1) – krzywych rozłącznych, to

$$K_{S_r}^2 = K_S^2 - k \Longrightarrow K_S^2 > 0.$$

Ponadto dla dowolnej krzywej C na S (przez indukcję)

$$K_S \cdot C = f^*K_S \cdot f^*C = (K_{S_r} - E) \cdot f^*C = K_{S_r} \cdot f^*C > 0.$$

Wobec tego z kryterium Nakai-Moishezona mamy, że $-K_S$ jest szeroki. S jest zatem powierzchnią Del Pezzo.

Następnym krokiem będzie zbadanie struktury ścian wielościanu Γ_r

Twierdzenie . $(r-1)$– wymiarowe ściany Γ_r odpowiadają ściągnięciom na $\mathbf{P}^2$ lub $\mathbf{P}^1$.

Dowód. Niech $\phi : S_r \to X$ będzie morfizmem związanym ze ścianą $r-1$ wymiarową. Jeżeli X jest powierzchnią, to morfizm ϕ jest biwymierny i ϕ ściąga $r-1$ różnych krzywych wyjątkowych, zatem $\rho(S_r) - \rho(X) = r-1 \Longrightarrow \rho(X) = 1 \Longrightarrow X \simeq \mathbf{P}^2$. Jeżeli $dimX < 2$ to $dimX = 1$. Wybierzmy krawędź w stożku $NE(S_r)$, która nie została ściągnięta. Odpowiada ona za krzywą wymierną, która nie jest odwzorowywana w punkt. Mamy $\phi : \mathbf{P}^1 \to X$, zatem $X \simeq \mathbf{P}^1$.

Twierdzenie . Ściany Γ_r stowarzyszone ze ściągnięciami na $\mathbf{P}^2$ i ściany wymiaru $< r-1$ są symplicjalne, zatem wielościan Γ_r jest symplicjalny w kowymiarze 1. Ściany związane ze ściągnięciami na $\mathbf{P}^1$ mają $2(r-1)$ wierzchołków $p_1, p_1^{'}, \ldots, p_{r-1}, p_{r-1}^{'}$, które spełniają relację: $p_1 + p_1{}^{'} = \cdots = p_{r-1} + p_{r-1}^{'}$, czyli są $r-1$– oktahedronami.

Dowód.

1. Jeżeli mamy ścianę wymiaru $r-1$ odpowiadającą ściągnięciu na $\mathbf{P}^2$, to z poprzedniego twierdzenia morfizm stowarzyszony z tą ścianą jest ściągnięciem $r-1$ rozłącznych krzywych, ściana jest zatem symplicjalna. Jeżeli mamy ścianę wymiaru $< r-1$, to stożek relatywny odpowiadającego jej morfizmu ma wymiar $\rho(S_r) - \rho(S)$ oraz wiemy, że jest generowany przez $\rho(S_r) - \rho(S)$ elementów, jest zatem symplicjalny.

2. Niech $\phi : S_r \to \mathbf{P}^1$ będzie ściągnięciem. Na mocy uwagi o osobliwościach włókien, albo ϕ jest $\mathbf{P}^1$– wiązką , i wtedy $S_r \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ lub $S_r \simeq Bl(\mathbf{P}^2)$, albo ϕ ma włókna osobliwe. Każda składowa włókna osobliwego jest (-1)–krzywą. Ściągając po jednej (-1)– składowej z każdego włókna dostajemy morfizm

$$\begin{array}{ccc} S_r & \to & \widetilde{S_r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}^1 & = & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

$\widetilde{S_r}$ (ponownie na mocy uwagi o osobliwości włókien) jest gładką, minimalną powierzchnią prostokreślną, zatem $\rho(\widetilde{S_r}) = 2$. Skoro tak, to musieliśmy ściągnąć $r-1$ (-1)–krzywych i na powierzchni $\widetilde{S_r}$ było $2(r-1)$ (-1)–krzywych ściąganych przez morfizm ϕ. Dowolne dwa włókna są numerycznie równoważne, mamy więc relację : $C_1 + C_1' \equiv C_2 + C_2' \equiv \ldots \equiv C_{r-1} + C_{r-1}'$. Wobec tego $(r-1)$– wymiarowy stożek $NE(\phi)$ w tym przypadku jest generowany przez $C_1, \ldots C_r'$, które spełniają powyższe relacje.

3. f-wektory powierzchni Del Pezzo.

Następujące twierdzenie pozwala nam opisać typ kombinatoryczny stożków dywizorów i krzywych na powierzchniach Del Pezzo.

Twierdzenie . Niech $n_r(i)$ oznacza ilość i- wymiarowych ścian w Δ_r, $\quad r \geq 2, \quad 0 \leq i \leq r$, u_r i v_r – ilość wierzchołków Δ_r odpowiadających ściągnięciom na $\mathbf{P}^2$ i $\mathbf{P}^1$ odpowiednio, n_r– ilość (-1)– krzywych na S_r. Wówczas:

1. $n_r(r) = 1$,

2. $n_r(r-1) = n_r$,

3. $n_r(0) = u_r + v_r$,

4. $n_r(i) = \big(n_r \cdot n_{r-1}(i)\big)/\big(r-i\big), \quad$ dla $0 < i < r$

5. $u_r = \big(n_r \cdot u_{r-1}\big)/r, \quad v_r = \big(n_r \cdot v_{r-1}\big)/\big(2(r-1)\big)$.

6. $\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \cdot n_r(i) = 1$.

Dowód.

1. $n_r(r) = 1$, ponieważ jest tylko jedna ściana wymiaru r (ściana niewłaściwa)

2. $n_r(r-1)$ = ilość ścian wymiaru $r-1$ w Δ_r = ilość wierzchołków Γ_r = ilość (-1)-krzywych na $S_r = n_r$.

3. $n_r(0)$ = ilość wierzchołków Δ_r = ilość ścian $(r-1)$– wymiarowych $\Gamma_r = u_r + v_r$.

4. Udowodniliśmy, że wielościan Δ_r jest kosymplicjalny w kowymiarze 1. Wobec tego dla dowolnej ściany τ wymiaru $0 < i < r$ wielościanu Δ_r wiemy, że ściana do niej dualna $\tau^\vee$ jest symplicjalna wymiaru $r-i-1$. Taka ściana ma dokładnie $r-i$ ścian wymiaru $r-i-2$, więc w ścianie τ schodzi się dokładnie $r-i$ ścian wymiaru $r-(r-i-1) = i+1$.

Wielościan Δ_r ma dokładnie n_r ścian wymiaru $r-1$: $\tau_1, \ldots, \tau_{n_r}$. Niech ${C_k}^{r-1}(i)$ oznacza zbiór ścian i– wymiarowych w ścianie τ_k, $C_r(i)$–zbiór ścian i–wymiarowych wielościanu Δ_r. Naturalnie zdefiniowane odwzorowanie

$$\coprod_{k=1,\ldots,n_r} C_k^{r-1}(i) \longrightarrow C_r(i)$$

(gdzie $\coprod$ oznacza sumę rozłączną) ma następujące własności:

– jest surjektywne, bo $i < r-1$

– każde włókno ma $(r-i)$ elementów, ponieważ dla dowolnej ściany i– wymiarowej τ istnieje dokładnie $(r-i)$ ścian $i+1$ wymiarowych $\tau_1, \ldots, \tau_{r-i}$ dla których τ leży na ich brzegu. Tych $(r-i)$ ścian wyznacza dokładnie $(r-i)$ ścian wymiaru $(r-1)$, które schodzą się w τ. Wobec tego $n_r(i) = \big(n_r \cdot n_{r-1}(i)\big)/\big(r-i\big)$,

5. Analogicznie dowodzimy zależności rekurencyjnych dla u_r i v_r. Oznaczmy typ wierzchołka, ktory jest dualny do ściany symplicjalnej wymiaru $(r-1)$ (odpowiadającej za ściągnięcie na $\mathbf{P}^2$) przez α. Ściana do niego dualna ma dokładnie r ścian wymiaru $(r-2)$, zatem w wierzchołku typu α schodzi się dokładnie r ścian wymiaru $(r-1)$. Podobnie widzimy, że w wierzchołku dualnym do ściany odpowiadającej za ściągnięcie na $\mathbf{P}^1$ (oznaczmy typ takiego wierzchołka przez β) schodzi się dokładnie $2(r-1)$ ścian.

Naturalnie określone odwzorowanie

$$\coprod_{k=1,\ldots,n_r} C_k^{r-1}(0) \longrightarrow C^r(0)$$

jest surjektywne. Przy tym wierzchołki typu α przechodzą na wierzchołki typu α a wierzchołki typu β przechodzą na wierzchołki typu β. Można wiec powyższe odwzorowanie rozlożyc na dwa odwzorowania, o rozłącznych dziedzinach i przeciwdziedzinach:

$$\coprod_{k=1,\ldots,n_r} C_{k,\alpha}^{r-1}(0) \longrightarrow C_\alpha^r(0)$$

$$\coprod_{k=1,\ldots,n_r} C_{k,\beta}^{r-1}(0) \longrightarrow C_\beta^r(0)$$

z których pierwsze ma włókna r– elementowe a drugie $2(r-1)$– elementowe. Stąd teza.

6. Wielościan Δ_r jest wypukły, więc ściągalny, a zatem $\chi(\Delta_r) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i n_r(i) = 1$.

Lemat Dla $r \geq 3$ zachodzi $n_{r+1} > n_r$

Dowód. Rozpatrzmy wielościan Δ_{r+1}. Wszystkie jego ściany kowymiaru 1 są typu Δ_r, i schodzą sie w ścianach kowymiaru ≥ 2 wielościanu Δ_r (to znaczy, przecięcie dowolnych dwóch ścian kowymiaru jeden jest ścianą kowymiaru 2 lub zbiorem pustym). Wobec tego do dowolnej ściany kowymiaru 1 jest doklejonych dokładnie $n_r(r-1)$ różnych ścian kowymiaru 1, zatem $n_{r+1}(r) \geq n_r(r-1)$, czyli $n_{r+1} \geq n_r$.

Podsumujmy uzyskane informacje o klasach wielościanów $\Delta = \{\Delta_r : \quad r \geq 2\}, \quad \Gamma = \{\Gamma_r : r \geq 2\}$ i ich związkach z geometrią S_r. Przez symbol $\longleftrightarrow$ będziemy rozumieć bijekcję.

1) (-1)- krzywe na $S_r \longleftrightarrow$ wierzchołki $\Gamma_r \longleftrightarrow (r-1)$– wymiarowe ściany Δ_r.

2) Ściągnięcia S_r na obiekty minimalne klasy $\mathcal{S}$, to znaczy $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^1 \longleftrightarrow (r-1)$– wymiarowe ściany $\Gamma_r \longleftrightarrow$ wierzchołki Δ_r.

2a) Ściągnięcie S_r na $\mathbf{P}^2 \longleftrightarrow (r-1)$– wymiarowa ściana symplicjalna Γ_r, zatem o r wierzchołkach $\longleftrightarrow$ wierzchołek Δ_r, w którym schodzi się r ścian wymiaru $r-1$.

2b) Ściągnięcie S_r na $\mathbf{P}^1 \longleftrightarrow (r-1)$–wymiarowa ściana Γ_r z relacjami $p_1+p_1' = p_2+p_2' = \ldots$, czyli $(r-1)$ – oktahedron. $\longleftrightarrow$ wierzchołek Δ_r, w którym schodzi się $2(r-1)$ ścian wymiaru $r-1$.

3) informacje 2a) i 2b) dają relacje rekurencyjne

$$u_r = (n_r \cdot u_{r-1})/r, \quad v_r = (n_r \cdot v_{r-1})/(2(r-1)).$$

4) Ściągnięcia biwymierne na obiekty nieminimalne.

Każda ściana Γ_r odpowiadająca takiemu ściągnięciu jest symplicjalna. Oznacza to, że wszystkie ściany γ_r wymiaru $< r-1$ są symplicjalne. Tłumaczy się to bezpośrednio na związek rekurencyjny: $n_r(i) = \big(n_r \cdot n_{r-1}(i)\big)/\big(r-i\big)$,

5) jeżeli $\Lambda \subset \Gamma_r$ – dowolna ściana, to odpowiada jej morfizm $f : S_r \to S_\Lambda$, który indukuje $f^* : \Delta(S_\Lambda) \hookrightarrow \Delta(S)$. Wobec tego klasa Δ jest zamknięta ze względu na branie ścian

Możemy wyabstrahować te własności kombinatoryczne:

Definicja . Klasą wielościanów Del Pezzo nazywamy klasę wielościanów wypukłych z markowanymi wierzchołkami (patrz punkt 1) definicji poniżej), opisaną przez następujące własności kombinatoryczne:

0) Klasa jest zamknięta ze względu na ściany.

1) Wierzchołki dzielą się na dwa typy: α i β.

2) W każdym wierzchołku typu β schodzi się r ścian, a w każdym wierzchołku typu α – $2(r-1)$ ścian kowymiaru 1.

3) Każdy wielościan tej klasy jest kosymplicjalny w kowymiarze 1.

4) W wymiarze 2 mamy tyko jeden wielościan typu (α, α, β).

Uwaga . Podpunkt 4) jest ważny z dwóch względów: posłuży nam dalej jako warunek brzegowy dla rekurencji, z drugiej zaś strony gwarantuje, że w wymiarach niższych niż 2 wielościany Del Pezzo są rzeczywiście takie, jak to wynika z rozważań geometryczno–algebraicznych, to znaczy że w wymiarze 1 są tylko $(\alpha, \beta), (\alpha, \alpha)$.

Te własności kombinatoryczne wystarczą, by odzyskać formuły rekurencyjne. Okazuje się, że korzystając tylko z warunków rekurencyjnych, danych początkowych (dla $r = 2$) i wypukłości wielościanu, można jednoznacznie wyznaczyć wszystkie wartości $n_r, n_r(i), v_r, u_r$ a co za tym idzie, słabą strukturę kombinatoryczną wielościanow Del Pezzo, za wyjątkiem $r = 8$.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie Klasa wielościanów Del Pezzo jest stabilna poniżej wymiaru 8, w tym sensie, że w każdym wymiarze $2 \leq r \leq 7$ istnieje dokładnie jedna dopuszczalna słaba struktura kombinatoryczna oraz dla $r \geq 9$ nie istnieją wielościany Del Pezzo. Ponadto każda z tych struktur kombinatorycznych jest realizowana, to znaczy istnieje wielościan który posiada daną strukturę kombinatoryczną.

Uwaga . Autor nie wie, jak udowodnić jednoznaczność struktury kombinatorycznej dla $r = 8$. Istnienie realizacji wynika wprost z faktu, że nasza klasa wielościanów pochodzi od powierzchni del Pezzo.

Uwaga . Oba fakty z powyższego twierdzenia są dobrze znane. Jak wiadomo, dla $r = 9$ na $\mathbf{P}^2$ rozdmuchanym w 9- ciu punktach pojawia się nieskończenie wiele (-1)- krzywych [CKM]. Jest niezwykle interesujące, że wszystkie informacje, zarówno o liczbach $n_r, n_r(i)$ jak i o nieistnieniu wielościanu Del Pezzo wymiaru 9 otrzymujemy nie odwołując się do geometrii powierzchni S_r, a posługując się tylko informacjami kombinatorycznymi.

Dowód.

Dla wielościanu Del Pezzo wymiaru $r \geq 2$ oznaczmy przez $n_r(i)$– ilość ścian wymiaru i, przez u_r, v_r– ilość wierzchołków typu β, α, przez n_r liczbę $n_r(r-1)$. Pomiędzy liczbami $n_r(i), v_r, u_r$ mamy związki:

1) $n_r(i) = \big(n_r \cdot n_{r-1}(i)\big)/\big(r-i\big)$,

2) $u_r = \big(n_r \cdot u_{r-1}\big)/\big(r-i\big)$,

3) $v_r = \big(n_r \cdot v_{r-1}\big)/\big(2(r-1)\big)$,

4) $n_r(0) - n_r(1) + n_r(2) + \cdots + (-1)^r = 1$.

5) $n_{r+1} > n_r$

Wszystkie te związki pozostają prawdziwe, ponieważ w ich dowodzie korzystaliśmy tylko z własności kombinatorycznych wielościanów Δ_r i Γ_r.

Zdefiniujmy wielomian

$$W_r(x) = n_r(0)x^r + n_r(1)x^{r-1} + n_r(2)x^{r-2} + \cdots + n_r(r-2)x^2 + n_r(r-1)x + n_r(r)$$

Uwaga Wielomian ten jest wielomianem charakterystycznym wielościanu dualnego do naszego wielościanu Del Pezzo.

Z warunku 4) wynika, że $W_r(-1) = (-1)^r$.

Ponadto

$$W_r'(x) = r \cdot n_r(0)x^{r-1} + n_r \cdot n_{r-1}(1)x^{r-2} + n_r \cdot n_{r-1}(2)x^{r-3} + \cdots +$$

$+n_r \cdot n_{r-1}(r-2)x + n_r \cdot n_{r-1}(r-1).$

Zaś

$W_{r-1}(x) = n_{r-1}(0)x^{r-1} + n_{r-1}(1)x^{r-2} + n_{r-1}(2)x^{r-3} + \cdots +$
$+n_{r-1}(r-3)x^2 + n_{r-1}(r-2)x + n_{r-1}(r-1).$

Zatem

$$W_r'(x) - n_r \cdot W_{r-1}(x) = x^{r-1}(r \cdot n_r(0) - n_r \cdot n_{r-1}(0)).$$

Przyjrzyjmy się wyrażeniu $r \cdot n_r(0) - n_r \cdot n_{r-1}(0)$.

$r \cdot n_r(0) - n_r \cdot n_{r-1}(0) =$
$= r \cdot (u_r + v_r) - n_r \cdot (u_{r-1} + v_{r-1}) =$
$= r \cdot \big((n_r \cdot u_{r-1})/r + (n_r \cdot v_{r-1})/(2(r-1))\big) - n_r \cdot (u_{r-1} + v_{r-1}) =$
$= n_r \cdot \big(r/(2(r-1)) \cdot v_{r-1} - v_{r-1}\big) =$
$= n_r \cdot v_{r-1} \cdot 1/2 \cdot \big(1/(r-1) - 1\big).$

Wobec tego

$$W_r'(x) = n_r \cdot \Big(W_{r-1}(x) + x^{r-1} \cdot v_{r-1} \cdot 1/2 \cdot \big(1/(r-1) - 1\big)\Big).$$

Zauważmy, że znając $W_r'(x)$ potrafimy jednoznacznie odtworzyć wielomian $W_r(x)$ dzięki warunkowi normującemu $W_r(0) = n_r(r) = 1$. To, wraz z informacją, że $W_r(-1) = (-1)^r$ i $W_2(x) = 3x^2 + 3x + 1$ powinno wystarczyć do znalezienia $W_r(x)$ dla dowolnego r.

przypadek $r = 2$) Wielościan Δ_2 to trójkąt o dwóch wierzchołkach typu α i jednym wierzchołku typu β, zatem

$$W_r(x) = 3x^2 + 3x + 1, \quad v_2 = 2, u_2 = 1$$

przypadek $r = 3$) Tożsamość $(*)$ daje nam, że

$$W_3'(x) = n_3 \cdot \Big(W_2(x) + x^2 \cdot v_2 \cdot 1/2 \cdot (1/2 - 1)\Big) = n_3 \cdot \Big(5/2x^2 + 3x + 1\Big)$$

Wobec tego

$$W_3(x) = n_3\big(5/6x^3 + 3/2x^2 + x\big) + 1$$

Wiemy ponadto, że $W_3(-1) = -1$, zatem

$$W_3(-1) = n_3 \cdot (-5/6 + 3/2 - 1) + 1 = -1 \Rightarrow n_3 \cdot (-2/6) = -2 \Rightarrow n_3 = 6$$

Posiadamy zatem wszystkie informacje o wielościanie Δ_3:

$$W_3(x) = 5x^3 + 9x^2 + 6x + 1, \quad u_3 = 6 \cdot u_1/3 = 2, v_3 = 6 \cdot v_2/4 = 3$$

Wobec tego wielościan Δ_3 to dwa czworościany foremne, sklejone wzdłuż podstaw, o nstępującym markowaniu: wszystkie wierzchołki na podstawie, wzdłuż której kleiliśmy są typu α zaś dwa pozostałe są typu β.

przypadek $r = 4, 5$) Dla $r = 4$ procedura zawodzi:

$$W_4'(x) = n_4 \cdot \Big(5x^3 + 9x^2 + 6x + 1 + x^3 \cdot 3/2 \cdot (1/3 - 1)\Big) = n_4 \cdot \Big(4x^3 + 9x^2 + 6x + 1\Big)$$

Stąd

$$W_4(x) = n_4 \cdot \big(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x\big) + 1$$

Wiemy, że $W_4(-1) = n_4 \cdot (1 - 3 + 3 - 1) + 1 = 1 \iff 1 = 1$. Nie otrzymujemy żadnej nowej informacji o n_4.

Mamy za to :

$$W_5'(x) = n_5 \cdot \Big(W_4(x) + x^4 \cdot v_4 \cdot 1/2 \cdot (1/4 - 1)\Big) = n_5 \cdot \Big(W_4(x) + x^4 \cdot n_4 \cdot 3/6 \cdot 1/2 \cdot (-3/4)\Big) =$$

$$= n_5 \cdot \Big(n_4 \cdot \big(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x\big) + 1 + n_4 \cdot x^4 \cdot (-3/16)\Big)$$

Stąd

$$W_5(x) = n_5 \cdot \Big(n_4 \cdot \big(13/80x^5 + 3/4x^4 + x^3 + 1/2x^2\big) + x\Big) + 1$$

Informacja o tym, że $W_5(-1) = -1$ po krótkich przekształceniach sprowadza się do równiania

$$n_5 \cdot \big(80 - 7 \cdot n_4\big) = 160$$

Ponieważ $160 = 2^5 \cdot 5$, to jedyne możliwości na n_5 to:

$$n_5 = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 10, 20, 40, 80, 160$$

Dla każdej z tych wartości n_5 możemy obliczyć n_4 Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że tylko $n_4 = 10, n_5 = 16$ są całkowitymi rozwiązaniami tego równania.

Możemy wobec tego wyliczyć współczynniki wielomianów $W_4(x), W_5(x)$ i co za tym idzie, wyznaczyć strukturę kombinatoryczną wielościanów Δ_4, Δ_5:

$$W_4(x) = 10x^2 + 30x^3 + 30x^2 + 10x + 1, \quad u_4 = 5, v_4 = 5$$

$$W_5(x) = 26x^5 + 120x^4 + 160x^3 + 80x^2 + 16x + 1, \quad u_5 = 16, v_5 = 10.$$

przypadek $r = 6, 7$) Analogicznie do poprzednich, mamy

$$W_6'(x) = n_6 \cdot \Big(W_5(x) + x^5 \cdot 10/2 \cdot (1/5 - 1)\Big) \Longrightarrow$$

$$W_6(x) = n_6 \cdot \Big(22/6 \cdot x^6 + 120/5 \cdot x^5 + 160/4 \cdot x^4 + 80/3 \cdot x^3 + 16/2 \cdot x^2 + x\Big) + 1$$

Ponownie informacja, że $W_6(-1) = 1$ nic nie wnosi, bowiem $22/6 - 120/5 + 160/4 - 80/3 + 16/2 - 1 = 0$. Widzimy jednakże, że n_6 musi być podzielne przez 3. Jak poprzednio, szukamy informacji o n_6 stopień wyżej:

$$W_7'(x) = n_7 \cdot \Big(W_6(x) + x^6 \cdot v_6 \cdot 1/2 \cdot (1/6 - 1)\Big) = n_7 \cdot \Big(W_6(x) + x^6 \cdot n_6 \cdot 10/20 \cdot (-5/6)\Big) \Longrightarrow$$

$$W_7(x) = n_7 \cdot \Big(n_6 \cdot \big(13/28 \cdot x^7 + 120/30 \cdot x^6 + 160/20 \cdot x^5 + 80/12 \cdot x^4 + 16/6 \cdot x^3 + 1/2 \cdot x^2\big) + x\Big) + 1$$

Równanie $W_7(-1) = -1$ po przekształceniach sprowadza się do równości

$$n_7 \cdot \big(420 - 15 \cdot n_6\big) = 840 \Longleftrightarrow n_7 \cdot \big(28 - n_6\big) = 56$$

Ponieważ $56 = 7 \cdot 8$, to mamy następujące możliwości na (n_7, n_6):

$$(n_7, n_6) = (1, -28), (2, 0), (4, 14), (8, 21), (7, 20), (14, 24), (28, 26), (56, 27)$$

Widzieliśmy wyżej, że $n_6$musi być podzielne przez 3, co pozostawia tylko trzy pary: $(n_7, n_6) = (8, 21), (14, 26), (56, 27)$. Tylko para $(56, 27)$ spełnia $n_7 > n_6$.

Wobec tego:

$$W_6(x) = 99x^6 + 648x^5 + 1080x^4 + 720x^3 + 216x^2 + 27x + 1, \quad u_6 = 72, v_6 = 27$$

$$W_7(x) = 702x^7 + 604x^6 + 12096x^5 + 10080x^4 + 4032x^3 + 756x^2 + 56x + 1, \quad u_7 = 576, v_7 = 126$$

przypadek $r = 8, 9$) Liczymy standardowo:

$$W_8'(x) = n_8 \cdot \big(W_7(x) + x^7 \cdot 126/2 \cdot (1/7 - 1)\big) = n_8 \cdot (W_7(x) - 54x^7) =$$
$$= n_8\big(648x^7 + 6048x^6 + 12096x^5 + 10080x^4 + 4032x^3 + 756x^2 + 56x + 1\big)$$

Stąd

$$W_8(x) = n_8 \cdot \big(81x^8 + 864x^7 + 2016x^6 + 2016x^5 + 1008x^4 + 252x^3 + 28x^2 + x\big) + 1$$

Ponownie równanie $W_8(-1) = 1$ jest tautologią.

Jak poprzednio, z zależności rekurencyjnej wyznaczamy $W_9(x)$:

$$W_9(x) = n_9 \cdot \Big(n_8 \cdot \big(1233/16 \cdot x^9 + 108 \cdot x^8 + 288 \cdot x^7 + 336 \cdot x^6 +$$
$$+ 1008/5 \cdot x^5 + 63 \cdot x^4 + 28/3 \cdot x^3 + 1/2 \cdot x^2\big) + x\Big) + 1$$

Po przekształceniach, dostajemy że równanie $W_9(-1) = -1$ jest równoważne równaniu

$$n_9 \cdot (16439 n_8 + 240) = 480$$

To równanie oczywiście nie posiada żadnych rozwiązań dodatnich. Widzimy zatem, że nie istnieje wielościan Δ_9– gdyby istniał, to istniałby także wielościan Δ_8 (jako ściana Δ_9) i powyższe równanie posiadałoby rozwiązania całkowite. Niestety, autor nie potrafi metodami analogicznymi do powyższych wyznaczyć jednoznacznie słabej struktury kombinatorycznej wielościanu Δ_8, choć z rozważań geometryczno–algebraicznych wiadomo, że istnieje.

4. Równania Dehna–Sommerville'a

Jak widzieliśmy, kluczową rolę w powyższych obliczeniach odgrywała tożsamość Eulera, to jest fakt, że alternująca suma liczb f_j jest równa 1, dzięki której mogliśmy wyznaczyć wartości n_i, dla $3 \leq i \leq 7$. Niestety, tożsamość Eulera w wymiarach parzystych nie daje żadnej istotnej informacji (jak należało się spodziewać – charakterystyka Eulera sfery nieparzystowymiarowej wynosi 0). Ponieważ rozpatrywana klasa wielościanów Del Pezzo jest klasą bardzo regularną z kombinatorycznego punktu widzenia, można było domyślać sie istnienia innych, bardziej subtelnych tożsamości niż tożsamość Eulera. Okazalo się, że istotnie, takie zależności istnieją.

Twierdzenie ([MS], s.99) Niech P będzie r–wielościanem symplicjalnym. Wówczas liczby $f_j(P)$ spełniają, oprócz równania Eulera, następujące równania:

$$\sum_{j=k}^{r-1}(-1)^j \cdot \binom{j+1}{k+1} \cdot f_j(P) = (-1)^{r-1} f_k(P)$$

dla $k = 0, \ldots, r-2$. Równania te są znane jako równania Dehna–Sommerville'a.

Uwaga ([MS], s.101) Równania te można przetłumaczyć na bardziej zwartą, wielomianową postać. Mianowicie, kładąc $f_P(x) = 1 - x \cdot f_0(P) + x^2 \cdot f_1(P) - \ldots + (-x)^r \cdot f_{r-1}(P)$ rówania Dehna-Sommerville'a tłumaczą się na $f_P(x) = (-1)^r f_P(1-x)$.

Jak zauważyliśmy, wielomian $W_r(x)$ jest wielomianem charakterystycznym wielościanu dualnego do wielościanu Del Pezzo wymiaru r (oznaczmy ten wielościan przez Γ_r). Nie możemy oczywiście zastosować tych równań do naszych wielomianów, ponieważ wielościany Γ_r nie są symplicjalne. Na szczęście, nie są one daleko od wielościanów symplicjalnych: przypomnijmy

Fakt. Wszystkie ściany wielościanu Γ_r są symplicjalne. za wyjątkiem pewej ilości ścian wymiaru $r-1$, które są $r-1$ – oktahedronami. Jedyne, co trzeba zrobić, żeby dostać wielościan symplicjalny, to striangulować ściany oktahedralne. Na szczęście jest to bardzo proste: wystarczy dorzucić jeden punkt we wnętrzu (relatywnym) takiej ściany, wówczas każdy wierzchołek oktahedronu wyznacza (nową) krawędź, każda krawędź oktahedronu wyznacza (nową) ścianę wymiaru 2 i tak dalej. Wobec tego wielomian charakterystyczny wielościanu $\widetilde{\Gamma_r}$–$\widetilde{W_r(x)}$ będącego 'symplicyzacją' wielościanu Γ_r powstaje z wielomianu $W_r(x)$ w następujący sposób:

1) zapominamy o wnętrzach relatywnych wszystkich ścian oktahedralnych, czyli odejmujemy $v_r \cdot x^r$

2) triangulujemy wnętrza ścian oktahedralnych. Każda ściana oktahedralna ma wielościan charakterystyczny $(1+2x)^{r-1}$, każda jej ściana wyznacza nową ścianę triangulacji o jeden wymiar większą, zatem dodajemy $v_r \cdot x \cdot (1+2x)^{r-1}$

Wobec tego

$$\widetilde{W}_r(x) = W_r(x) + v_r \cdot \big(x(1+2x)^{r-1} - x^r$$

Wobec tego równania Dehna–Sommerville'a mają postać

$$\widetilde{W}_r(-x) = (-1)^r \widetilde{W}_r(x-1)$$

czyli, wracając do wielomianu $W_r(x)$:

$$W_r(-x) - (-1)^r W_r(x-1) = v_r \cdot (-1)^{r-1}\big((x-1)^r - x^r + (2x-1)^{r-1}\big)$$

Niestety, równania te nie wnoszą niczego nowego – okazuje się, że wynikają z naszych równań. W tym sensie można potraktować wyniki pracy jako uogólnienie równań Dehna–Sommerville'a na nową klasę wielościanów.

5. Zastosowania.

Przyjmiemy następującą definicję:

Definicja . Niech $\phi_i : X \to Y, \quad i = 1,2$ będą ściągnięciami. Powiemy, że te dwa ściągnięcia są równoważne, jeżeli istnieje automorfizm $\psi : Y \to Y$ taki że diagram

$$\begin{array}{ccccc} & X & = & X & \\ \phi_1 & \downarrow & & \downarrow & \phi_2 \\ & Y & \xrightarrow{\psi} & Y & \end{array}$$

jest przemienny.

Jak wiemy, twierdzenie o odpowiedniości między ściągnięciami a ścianami stożka $NE(X)$ ([M2], s.20) pozwala nam utożsamiać ściany ekstremalne i ściągnięcia. Korzystając z tego, mamy

Twierdzenie . Dla danej powierzchni del Pezzo S_r istnieje dokładnie u_r nierównoważnych ściągnięć na $\mathbf{P}^2$, oraz v_r nierównoważnych ściągnięć na $\mathbf{P}^1$.

Podsumujmy, jakie są wartości u_r i v_r:

r	2	3	4	5	6	7
u_r	1	2	5	16	72	576
v_r	2	3	5	10	27	126

Bibliografia.

[CKM] H. Clemens, J. Kollar, S. Mori, Higher Dimensional Complex geometry, Astérisque, 1988

[G] B. Grünbaum, Convex Polytopes, John Wiley and Sons, 1967

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Springer-Verlag 1977.

[KM] J. Kollár, S .Mori, Birational geometry of algebraic varieties, Cambridge University Press, 1988.

[Ma] Yu .I .Manin, Cubic forms, North–Holland, Amsterdam, 1974.

[M1] S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not nummerically effective. Annals of Math.116 1982, 133-176

[M2] S. Mori, Hartshorne cojecture and extremal ray, Sugaku Expositions Vol. 1, Number 1, October 1988, 15–37.

[MS] P. McMullen, G.C. Shephard, Convex polytopes and the Upper Bound Conjecture, Cambridge University Press 1971

[N] V.V. Nikulin, Basis of the diagram method for generalized reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces with nef anticanonical class, Inter. J. of. Math, 7 (1996), no.1 71-108.

[R] M. Reid, Chapters on algebraic surfaces, w Complex Algebraic Geometry, ed.J. Kollár, IAS – AMS '99