**Rozmaitości toryczne** **Jesień 2015/2016**

Seria 8: formy różniczkowe, funkcje wypukłe.

1. $T_N$-niezmiennicze formy różniczkowe i dywizor kanoniczny. Załóżmy, że kraty $N$ i $M$ rangi $n$ mają bazy dualne $v_i$ i $u_j$. Przez $x_i = \chi^{u_i}$ oznaczamy współrzędne na torusie $T_M = T_N$ a przez $\partial_{x_i}$ oznaczamy odpowiadające im różniczkowania i pola wektorowe na $T_M$.

   (a) Sprawdź, że operatory różniczkowe $x_i\partial_{x_i} : k[T] \to k[T]$ zachowują gradację w $M$. Wywnioskuj z tego, że odpowiadające im pola wektorowe są niezmiennicze ze względu na działanie torusa na sobie. Policz pole styczne do trajektorii działania 1-parametrowej podgrupy $\lambda_v$ dla $v = \sum_i a_i v_i \in N$.

   (b) Pokaż, że formy $x_i^{-1}dx_i = d\log x_i$ są $T_N$ niezmiennicze i stanowią bazę $k[T]$-modułu różniczek $\Omega_{T_N}$. Czyli mamy izomorfizm modułów z gradacją w $M$: $\Omega_{T_N} \simeq \bigoplus_i d\log x_i \cdot k[T]$.

   (c) Weźmy wachlarz $\Sigma_1 = \{\langle 0\rangle, \langle v_1\rangle\}$. Policz krotność zera lub bieguna pola (formy) $x_i\partial_{x_i}$ (odpowiednio $d\log x_i$) na dywizorze $D_{\langle e_1\rangle}$.

   (d) Pokaż, że (z dokładnością do stałej) forma $d\log x_1 \wedge \cdots \wedge d\log x_n$ jest jedyną nigdzie nieznikającą $n$-formą na $T_N$.

   (e) Niech $\Sigma$ będzie dowolnym wachlarzem w $N$. Pokaż, że dywizor kanoniczny $_X$ na rozmaitości $X = X(\Sigma)$ jest równy $-\sum_\rho D_\rho$, gdzie suma przebiega wszystkie promienie w $\Sigma$.

2. To zadanie nawiązuje do zadania 6 z serii 6. Przypomnijmy, że w sytuacji i przy oznaczeniach z tego zadania, krata $\widehat{M}$ opisuje funkcje kawałkami liniowe i całkowite na wachlarzu w kracie $M$, którego promienie są generowane przez wektory $v_i$. Zakładamy, że $\Sigma$ jest regularny, wówczas bazą $\widehat{M}$ są wektory $\hat{v}_i^* \in \widehat{M}$ odpowiadającymi funkcjom na $|\Sigma|$ przyjmującym wartość 1 na $v_i$ a 0 na pozostałych $v_j$. Pamietamy, że $\widehat{M}$ zawiera funkcje liniowe $M$ więc przez $p : \widehat{M} \longrightarrow P := \widehat{M}/M$ oznaczmy rzutowanie na iloraz (zauważ, że $P$ nie ma torsji). Załóżmy ponadto, że wachlarz $\Sigma$ jest zupełny (choć pewnie wystarczy, żeby jego nośnik był wypukły).

   (a) Pokaż, że zbiór (rzeczywistych) funkcji w $\widehat{M_{\mathbb{R}}}$ wypukłych na wachlarzu $\Sigma$ stanowi stożek wypukły, którego wierzchołkiem jest podprzestrzeń $M_{\mathbb{R}}$. Inaczej mówiąc: istnieje sciśle wypukły stożek $\mathrm{Nef}(\Sigma) \subset P_{\mathbb{R}}$, taki że $p^{-1}(\mathrm{Nef}(\Sigma))$ zawiera wszystkie (rzeczywiste) wypukłe kawałkami liniowe funkcje na $\Sigma$.

(b) Pokaż, że wnętrze (absolutne w $P$) stożka $\mathrm{Nef}(\Sigma)$ odpowiada funkcjom ściśle wypukłym a co za tym idzie na $\Sigma$ istnieją funkcje ściśle wypukłe wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{Nef}(\Sigma)$ jest maksymalnego wymiaru.

(c) Pokaż, że jeśli ranga $N$ jest 2 to stożek $\mathrm{Nef}(\Sigma)$ jest zawsze maksymalnego wymiaru.

(d) Znajdź stożek $\mathrm{Nef}(\mathbb{F}_a)$ dla powierzchni Hirzebrucha z zadania 1 z piątej serii. Dla ułatwienia oznaczmy $v_1 := e_1$, $v_2 := e_2$, $v_3 := -e_2$ oraz $v_4 := -e_1 + ae_2$ i jako bazę $P$ weźmy obraz $\hat{v}_1^*$ i $\hat{v}_2^*$, czyli funkcji kawałkami liniowych przyjmujących wartość 1 na, odpowiednio, $v_1$ i $v_2$, a 0 na pozostałych. Jakie relacje muszą spełniać liczby $s_1$, $s_2$ by funkcja $s_1\hat{v}_1^* + s_2\hat{v}_2^*$ była wypukła?

3. Cofanie funkcji kawałkami liniowych na wachlarzach: Niech $\phi : (N_1, \Sigma_1) \longrightarrow (N_2, \Sigma_2)$ będzie odwzorowaniem wachlarzy spełniających warunki z powyższego zadania.

   (a) W oznaczeniach z poprzedniego zadania pokaż, że cofanie funkcji definiuje odwzorowanie liniowe $\phi^* : \widehat{M_2} \longrightarrow \widehat{M_1}$ rozszerzające odwzorowanie sprzężone $\phi^* : M_2 \longrightarrow M_1$ i wobec tego opuszcza się do odwzorowania liniowego $\phi^* : P_2 \longrightarrow P_1$.

   (b) Pokaż, że $\phi^*(\mathrm{Nef}(\Sigma_2)) \subseteq \mathrm{Nef}(\Sigma_1)$.

4. Niech $N \simeq \mathbb{Z}^3$ będzie kratą z bazą $e_1$, $e_2$, $e_3$, połóżmy również $e_0 = -(e_1 + e_2 + e_3)$. Pokaż, że w $N$ istnieje wachlarz zupełny i regularny, którego promienie są generowane przez $\pm e_i$, gdzie $i = 0, \dots 3$, taki że nie ma na nim żadnej funkcji ściśle wypukłej. Wskazówka: www.mimuw.edu.pl/~jarekw/java/ToricExamples.html