Rozmaitości toryczne **Jesień 2015/2016**

Seria 7: grupa klas, grupa Picarda.

1. Znajdź grupę klas powierzchni torycznych, których wachlarze w $N \simeq \mathbb{Z}^2$ zawierają promienie generowane przez następujące wektory:

   (a) $(1,0),(0,1),(-1,-1)$

   (b) $(-1,0),(1,0),(0,-1),(0,1),(1,1),(2,1),\cdots(r,1)$

   (c) $(2,1),(1,2),(-1,-1)$

   (d) $(2,-1),(-1,2),(-1,-1)$

2. Rozpatrzmy następujące wektory w $N = \mathbb{Z}^n$: $v_1 = (n,-1,-1,\ldots,-1)$, $v_2 = (-1,n,-1\ldots,-1)$, ……, $v_n = (-1,-1,\ldots,n)$ oraz $v_0 = (-1,-1,\ldots,-1)$. Weźmy wachlarz zupełny Σ w $N_{\mathbb{R}}$, w którym są maksymalne stożki $\sigma_i = \langle v_0,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n\rangle$, dla $i = 0,\ldots n$. Znajdź grupę klas dla rozmaitości $X(\Sigma)$. Rozstrzygnij która krotność każdego z T-niezmienniczych dywizorów Weila jest jest dywizorem Cartier. Znajdź grupę Picarda i podaj jej generatory.

3. Niech $X(\Sigma)$ będzie rozmaitością z poprzedniego zadania. Pokaż, że istnieje toryczne odwzorowanie $\mathbb{P}^n \to X(\Sigma)$, którego grupa automorfizmów jest równa podgrupie torsyjnej w grupie klas.

4. To zadanie nawiązuje do zadania 4 z serii 2. Zakładamy, że $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ jest stożkiem symplicjalnym maksymalnego wymiaru w kracie N, przez U_σ oznaczamy odpowiadającą mu afiniczną rozmaitość toryczną. Niech $\widehat{N} \subset N$ oznacza kratę rozpiętą na (prymitywnych) vektorach $v_\rho \in N$ generujących promienie stożka σ i przez $H = N/\widehat{N}$ oznaczmy (skończoną) grupą ilorazową. Dodatkowo, przez $\widehat{M} \subset M_{\mathbb{R}}$ oznaczamy kratę dualną do $\widehat{N}$ z bazą dualną u_ρ.

   (a) Pokaż, że algebra $B = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \widehat{M}]$ ma naturalną gradację w $H = \widehat{M}/M$, to jest $B = \bigoplus_{h\in H} B_h$ oraz $B_0 = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ jest pierścieniem niezmienników indukowanego działania H na B.

   (b) Pokaż, że ciąg dokładny $0 \to M \to \widehat{M} \to H \to 0$ daje naturalny isomorfizm grupy klas $\mathrm{Cl}(U_\sigma)$ torycznej rozmaitości afiniczej U_σ z grupą ilorazową H.

(c) Niech $D_\rho \subset U_\sigma$ oznacza T_N-niezmienniczy dywizor odpowiadający promieniowi ρ stożka σ. Pokaż, że $\mathcal{O}(D_\rho)(U_\sigma) \simeq \bigoplus_u \mathbb{C} \cdot \chi^u$, gdzie suma jest wzięta po $u \in M$ takich, że $u + u_\rho \in \sigma^\vee$.

(d) Pokaż, że każdy z B_0-modułów B_h, gdzie $h \in H \simeq \mathrm{Cl}(U_\sigma)$ jest naturalnie izomorficzny z $\mathcal{O}(D)(U_\sigma)$, gdzie D jest T_N niezmienniczym dywizorem, którego klasa jest równa h.