Rozmaitości toryczne **Jesień 2015/2016**

Seria 6: funkcje kawałkami liniowe na wachlarzach i powiązane z nimi odwzorowania rozmaitości torycznych.

Niech Σ będzie wachlarzem w N. Ciągłą funkcję $\phi : |\Sigma| \to \mathbb{R}$ nazywamy kawałkami liniową (względem Σ) o ile obcięcie do każdego $\sigma \in \Sigma$ jest funkcją liniową. Mówimy ponadto, że

- ϕ jest całkowita o ile $\phi(|\Sigma| \cap N) \subseteq \mathbb{Z}$.
- ϕ jest wypukła o ile dla $x_1,\ x_2,\ x_3 \in |\Sigma|$ takich, że $x_1 + x_2 = x_3$ mamy $\phi(x_3) \geq \phi(x_1) + \phi(x_2)$.
- ϕ jest ściśle wypukła o ile dla x_i jak wyżej takich, że ponadto $x_1 \in \sigma_1$ i $x_2 \in \sigma_2$ oraz $\sigma_1 \neq \sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \sigma_2$ mamy $\phi(x_3) > \phi(x_1) + \phi(x_2)$.

1. Dla promienia $\rho_i \in \Sigma^1$ niech v_i oznacza generator $\rho_i \cap N$. Pokaż następujace fakty:

   (a) jeśli Σ jest symplicjalny to dla dowolnego wyboru $a_i \in \mathbb{Z}$ istnieje dokładnie jedna kawałkami liniowa funkcja ϕ na Σ spełniająca warunek $\forall v_i : \phi(v_i) = a_i$;

   (b) jeśli dodatkowo Σ jest regularny to taka funkcja jest całkowita.

2. Załóżmy, że ϕ jest całkowitą funkcją kawałkami liniową na zupełnym wachlarzu Σ.

   (a) Pokaż, że dla każdego stożka $\sigma \in \Sigma$ maksymalnego wymiaru istnieje dokładnie jedno $u_\sigma \in M$ takie, że $(u_\sigma)_{|\sigma} = \phi_{|\sigma}$. Pokaż, że wówczas, dla każdej pary stożków maksymalnego wymiaru, funkcja $\chi^{u_{\sigma_1} - u_{\sigma_2}}$ jest regularna i odwracalna na $U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$.

   (b) Pokaż, że w $N \times \mathbb{Z}$ istnieje dokładnie jeden wachlarz $\Sigma^\bullet$, którego nośnik jest wykresem funkcji ϕ a rzutowanie $N \times \mathbb{Z} \to N$ indukuje bijekcje stożków w $\Sigma^\bullet$ i Σ.

   (c) Pokaż, że dla dowolnego stożka $\sigma^\bullet \in \Sigma^\bullet$ mamy $U_{\sigma^\bullet} \simeq U_\sigma \times \mathbb{C}^*$, gdzie rzutowanie na U_σ jest indukowane przez morfizm wachlarzy $\Sigma^\bullet \to \Sigma$, oraz, w terminach tego izomorfizmu, dla stożków σ_1 i σ_2 maksymalnego wymiaru, na $U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ mamy utożsamienie $t_1 = \chi^{u_{\sigma_1} - u_{\sigma_2}} \cdot t_2$, gdzie t_i jest współrzędną w $\mathbb{C}^*$ w produkcie $U_{\sigma_i} \times \mathbb{C}^*$.

(d) Wskazówka: Izomorfizm $U_{\sigma^\bullet} \simeq U_\sigma \times \mathbb{C}^*$ wyznaczony jest przez homomorfizm krat $N \times \mathbb{Z} \to N \times \mathbb{Z}$ zadany wzorem $(v, a) \mapsto (v, a - u_\sigma(v))$.

(e) Czy założenie zupełności wachlarza Σ jest istotne (gdzie)?

(f) Czy założenie całkowitości funkcji ϕ jest istotne (gdzie)?

3. W sytuacji poprzedniego zadania, niech Σ^+ będzie wachlarzem w $N \times \mathbb{Z}$ zawierającym oprócz stożków z $\Sigma^\bullet$ promień $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (0, 1)$ oraz stożki $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (0, 1) + \sigma^\bullet$ dla $\sigma^\bullet \in \Sigma^\bullet$.

   (a) Pokaż, że mamy odwzorowanie wachlarzy $\Sigma^+ \to \Sigma$ takie, że włókna indukowanego odwzorowania rozmaitości torycznych $X(\Sigma^+) \to X(\Sigma)$ sa równe $\mathbb{C}$.

   (b) Pokaż, że powyższe odwzorowanie indukuje izomorfizm podrozmaitości $V(\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (0, 1)) \subset X(\Sigma^+)$ i rozmaitości $X(\Sigma)$.

   (c) Pokaż, że podobnie jak Σ^+ możemy zdefiniować Σ^-, dodając do $\Sigma^\bullet$ promień $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (0, -1)$ oraz wachlarz zupełny $\Sigma^\pm$ dodając oba promienie: $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (0, 1)$ i $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (0, -1)$. Znajdź włókna rzutowania odpowiadających im rozmaitości torycznych na $X(\Sigma)$.

4. Załóżmy, że funkcja $-\phi$ z poprzednich zadań jest ściśle wypukła. Pokaż, że wówczas nośnik Σ^+ jest ściśle wypukłym stożkiem, oznaczmy go σ^+, którego brzegiem jest $|\Sigma^\bullet|$. Pokaż, że usunięcie jedynego $\mathbb{T}$- niezmienniczego punktu z torycznej rozmaitości afinicznejU_{σ^+} daje rozmaitość toryczną $X(\Sigma^\bullet)$.

5. W kracie N generowanej przez wektory $e_1, \ldots, e_n$ rozpatrzmy wachlarz $\Sigma_\mathbb{P}$ przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n$ z promieniami generowanymi przez $e_1, \ldots, e_n$ oraz $e_0 = -(e_1 + \cdots + e_n)$. Dla $a \in \mathbb{Z}$ definiujemy $\phi_a : N_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcję kawałkami liniową na wachlarzu $\Sigma_\mathbb{P}$ taką, że dla $i = 1, \ldots, n$ mamy $\phi_a(e_i) = 0$, oraz $\phi_a(e_0) = -a$.

   (a) Pokaż, że każda funkcja $\phi : N_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ całkowita i kawałkami liniowa na $\Sigma_\mathbb{P}$ jest postaci $u + \phi_a$ dla pewnego $a \in \mathbb{Z}$ i $u \in M$.

   (b) Niech $\Sigma_a^\bullet$, Σ_a^+ będą wachlarzami w $N \times \mathbb{Z}$ zdefiniowanymi jak w zadaniach 2 i 3 dla funkcji ϕ_a. Pokaż, że $X(\Sigma_{-1}^\bullet) \simeq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, $X(\Sigma_1^+) \simeq \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{*\}$, gdzie $*$ oznacza punkt, natomiast $X(\Sigma_{-1}^+)$ jest rozdmuchaniem $\mathbb{C}^{n+1}$

(c) Niech t_a oznacza lokalną współrzędna we włóknie rzutowania $X(\Sigma_a^\bullet) \to \mathbb{P}^n$, jak w zadaniu 2c. Pokaż, że dla $a \neq 0$ mnożenie przez a drugiej współrzędnej w produkcie $N \times \mathbb{Z}$ indukuje morfizm wachlarzy $\Sigma_1^\bullet \to \Sigma_a^\bullet$, zgodny z rzutowaniem na N, natomiast w lokalnych współrzędnych indukowane opdwzorowanie $X(\Sigma_1^\bullet) \to X(\Sigma_a^\bullet)$ podnosi współrzędne t do a-tej poltęgi, to jest $t_1 \mapsto t_a = t_1^a$.

(d) Przy oznaczeniach zadania 4 pokaż, że dla $a < 0$ rozmaitość $U_{\sigma_a^+}$ jest ilorazem $\mathbb{C}^{n+1}$ przy działaniu diagonalnym cyklicznej grupy multiplikatywnej pierwiastków a-tego stopnia z jedności: $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} \ni (\epsilon_a, v) \mapsto \epsilon_a \cdot v \in \mathbb{C}^{n+1}$.

6. Niech Σ będzie wachlarzem regularnym w kracie N; niekoniecznie musi być to wachlarz zupełny ale zakładamy, że jego nośnik $|\Sigma|$ jest wypukły. Niech $\phi,\ \psi : |\Sigma| \to \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowitymi na Σ, dla których możemy skonstruować wachlarze $\Sigma_\phi^\bullet$ i $\Sigma_\psi^\bullet$ (oraz inne) jak powyżej.

(a) Pokaż, że rozmaitości toryczne $X(\Sigma_\phi^\bullet)$ i $X(\Sigma_\psi^\bullet)$ są (torycznie) izomorficzne nad $X(\Sigma)$ (to jest istnieje izomorfizm zgodny z rzutowaniem na $X(\Sigma)$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi - \psi$ jest funkcją liniową na N, czyli należy do M.

(b) Weźmy zbiór promieni Σ^1, dla każdego $\rho_i \in \Sigma^1$ niech v_i oznacza generator $N \cap \rho_i$. Niech $\widehat{N}$ będzie wolną grupą abelową $\bigoplus_{\Sigma^1} \mathbb{Z} \cdot \hat{v}_i$ z odwzorowaniem $\pi : \widehat{N} \to N$ taki, że $\pi(\hat{v}_i) = v_i$. Pokaż, że $\widehat{M} = Hom_{\mathbb{Z}}(\widehat{N}, \mathbb{Z})$ to grupa całkowitych odwzorowań liniowych na Σ natomiast odwzorowanie dualne $\pi^* : M \to \widehat{M}$ jest naturalnym włożeniem funkcji liniowych. Zauważ, że kontrukcja $\widehat{M}$ zależy wyłącznie od Σ^1.

(c) Znajdź warunek na to by funkcje z $\widehat{M}$ były wypukłe na $|\Sigma|$.

(d) Znajdź warunek na to by funkcje z $\widehat{M}$ były ściśle wypukłe na $|\Sigma|$.