Rozmaitości toryczne **Jesień 2015/2016**

Seria 5: wachlarze i orbity działania torusa.

Wachlarz Σ w kracie N jest zupełny jeśli jego nośnik $|\Sigma|$ jest równy $N_{\mathbb{R}}$. Stożek σ wymiaru r nazywamy symplicjalnym jeśli jest generowany przez r wektorów. Jeśli dodatkowo generatory σ można uzupełnić do $\mathbb{Z}$-bazy kraty N to stożek jest regularny. Wachlarz Σ nazywamy symplicjalnym/regularnym jeśli każdy stożek w Σ jest symplicjalny/regularny.

1. Regularne i zupełne powierzchnie toryczne. Niech N będzie kratą generowaną przez e_1 i e_2. Powierzchnia Hirzebrucha $\mathbb{F}_a$, gdzie $a \geq 0$, ma wachlarz zupełny, którego promienie są generowane przez e_1, e_2, $-e_2$ oraz $-e_1 + ae_2$.

   (a) Pokaż, że każda zupełna i regularna (tj. mająca wachlarz zupełny i regularny) powierzchnia toryczna, której wachlarz ma 3 promienie jest izomorficzna z $\mathbb{P}^2$, jeśli natomiast jej wachlarz ma 4 promienie to jest izomorficzna z pewną powierzchnią Hirzebrucha.

   (b) Pokaż, że jeśli zupełna i regularna powierzchnia ma wachlarz, który ma więcej niż 4 promienie, to powstała ona z rozdmuchania (zob. zadanie 9 serii 4) powierzchni torycznej, której wachlarz ma mniej promieni.

2. Niech Σ bedzie wachlarzem w kracie N. Niech $|\Sigma|^\vee \subseteq M_{\mathbb{R}}$ oznacza zbiór 1-form na N, które są nieujemne na $|\Sigma|$, natomiast niech $M_{|\Sigma|}$ oznacza podkratę w M rozpiętą przez $|\Sigma^\vee|$. Włożenie $M_{|\Sigma|} \hookrightarrow M$ daje suriekcje $\pi : N \longrightarrow N_{|\Sigma|}$.

   (a) Niech $\widehat{\sigma}$ oznacza stożek w $(N_{|\Sigma|})_{\mathbb{R}}$ dualny do $|\Sigma|^\vee \subseteq (M_{|\Sigma|})_{\mathbb{R}}$ (zauważ, że $|\Sigma|^\vee$ jest stożkiem). Pokaż, że $\pi(|\Sigma|) = \widehat{\sigma}$ i wobec tego mamy odwzorowanie wachlarzy $\pi : (N, \Sigma) \longrightarrow (N_{|\Sigma|}, \Sigma(\widehat{\sigma}))$.

   (b) Pokaż, że odwzorowanie rozmaitości $X(\pi) : X(\Sigma) \longrightarrow X(\Sigma(\widehat{\pi}))$ jest suriektywne i jeśli nośnik $|\Sigma|$ jest wypukły to jest właściwe (właściwość oznacza, że przeciwobraz każdego punktu w $\widehat{\sigma}$ jest zawarty w nośniku Σ).

   (c) Pokaż, ze odwzorowanie $X(\pi)$ ma następującą własność uniwersalną: dowolne (!) odwzorowanie (algebraiczne) $X \longrightarrow \mathbb{C}^r$ faktoryzuje się przez $X(\pi)$. (Skorzystaj z tego, że funkcje na $X(\Sigma)$ są kombinacjami liniowymi charakterów i zobacz, które charaktery z M rozszerzają się do funkcji regularnych $X(\Sigma) \to \mathbb{C}$.)

3. Niech Σ będzie wachlarzem w $N_{\mathbb{R}}$, gdzie N jest kratą rangi n. Dla $\sigma \in \Sigma$ przez $U_\sigma \subseteq X(\Sigma)$ oznaczamy podzbiór otwarty odpowiadający algebrze $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ natomiast przez $\mathbb{O}(\sigma) \subset X(\Sigma)$ oznaczamy podzbiór U_σ zdefiniowany przez $\mathbb{T}_N$-niezmienniczy ideał $\mathfrak{q}_\sigma = (\chi^u : u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp) \triangleleft \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$.

   (a) Pokaż, że $\mathbb{O}(\sigma) = (\mathbb{C}^*)^{n-d}$, gdzie d to wymiar σ, a $\mathbb{T}_N = N \otimes \mathbb{C}^*$ działa na $\mathbb{O}(\sigma)$ z grupą izotropii równą $N_\sigma \otimes \mathbb{C}^*$, gdzie $N_\sigma = N \cap (\sigma + (-\sigma))$

   (b) Dla $x \in X(\Sigma)$ niech σ będzie najmniejszym stożkiem w Σ (w sensie $\preceq$) takim, że $U_\sigma \ni x$. Pokaż, że $x \in \mathbb{O}(\sigma)$.

   (c) Wskazówka do poprzedniego punktu: weź największy $\mathbb{T}$-niezmienniczy ideał w $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ zawierający funkcje znikające w x. O ile nie jest on równy $\mathfrak{q}_\sigma$ to istnieje $u \in (\sigma^\vee \setminus \sigma^\perp) \cap M$ takie, że $\chi^u(x) \neq 0$. Pokaż, że $\sigma \cap u^\perp \in \Sigma$ oraz $x \in U_{\sigma \cap u^\perp}$.

   (d) Z poprzednich punktów wywnioskuj, że $X(\Sigma) = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} \mathbb{O}(\sigma)$.

4. Domknięcie orbity $\mathbb{O}(\sigma)$ w $X(\Sigma)$ będziemy oznaczać $V(\sigma)$.

   (a) Pokaż, że $V(\sigma) \subseteq \bigcup_{\tau \succeq \sigma} U_\tau$.

   (b) Pokaż, że $V(\sigma) = \bigcup_{\tau \succeq \sigma} \mathbb{O}(\tau)$.

   (c) Pokaż, że domknięcie każdej 1-wymiarowej orbity w $X(\Sigma)$ jest równe $\mathbb{C}^*$ albo $\mathbb{C}$, albo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.