Rozmaitości toryczne **Jesień 2015/2016**

Seria 4: wachlarze i rozmaitości.

Rozmaitości są zdefiniowane nad $k = \mathbb{C}$. Wachlarze w kracie N (lub w przestrzeni $N_{\mathbb{R}}$) oznaczane są dużymi literami Σ, Δ itd, a stożki małymi σ, δ, τ itd. Wszystkie stożki w N są sciśle wypukłe. Rozmaitość toryczną odpowiadającą wachlarzowi Σ oznaczamy $X(\Sigma)$. Nośnik wachlarze $|\Sigma|$ to suma teoriomnogościowa jego stożków: $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma\in\Sigma}\sigma$.

1. Wachlarz stożka, szkielet wachlarza. Mając dany stożek σ przeporządkowujemy jemu wachlarz składający się z jego ścian. Sprawdź, że algebra funkcji globalnych na $X(\Sigma)$ jest równa $k[M\cap\sigma^\vee]$. Mając dany wachlarz Σ jego r-ty szkielet Σ^r składa się ze stożków w Σ, których wymiar jest $\leq r$. Pokaż, że jest to wachlarz.

2. Niech $\tau \prec \sigma$ będzie ścianą wymiaru r. W stożku $\sigma^\vee$ odpowiada mu ściana $\tau^* \prec \sigma^\vee$ kowymiaru r składająca się z tych elementów, które są prostopadłe (w sensie evaluacji) do ściany τ. Definiujemy jednorodny ideał $I_\tau \lhd k[M\cap\sigma^\vee]$ jako k-podprzestrzeń liniową rozpiętą na charakterach $\chi^u : u \in (\sigma^\vee\setminus\tau^*)\cap M$. Sprawdź, że ideał I_τ definiuje domkniętą T_M-niezmienniczą podrozmaitość rozmaitości V_σ, która jest składową różnicy $X(\Sigma(\sigma)^r)\setminus X(\Sigma(\sigma)^{r-1})$.

3. Niech Σ będzie wachlarzem w N, natomiast Σ' wachlarzem w N'. Zdefiniuj wachlarz produktowy w $N\times N'$ i sprawdź, że $X(\Sigma\times\Sigma')\simeq X(\Sigma)\times X(\Sigma')$.

4. Załóżmy, że Σ jest wachlarzem w $N_{\mathbb{R}}$ takim, że uwypuklenie (otoczka wypukła) jego nośnika $|\Sigma|$ to cała przestrzeń $N_{\mathbb{R}}$. Pokaż, że jedyne globalne funkcje regularne na $X(\Sigma)$ to funkcje stałe.

5. Najprostszy wachlarz zupełny. Pokaż, że rozmaitość toryczna definiowana przez wachlarz $\{\mathbb{R}\cdot e,\ \mathbb{R}\cdot(-e),\ \{0\}\}$ w $N=\mathbb{Z}\cdot e$ jest sferą $\mathbb{CP}^1$. W szczególności pokaż jak sklejanie dwóch egzemplarzy $\mathbb{C}$ ze współrzędnymi z_1 i z_2 za pomocą relacji $z_2 = 1/z_1$ można zinterpretować jako zmianę współrzędnych przy rzucie stereograficznym sfery.

6. Przestrzeń rzutowa. Niech N będzie kratą rangi n z bazą $e_1,\ldots,e_n$; ponadto kładziemy $e_0 = -(e_1+\cdots+e_n)$.

(a) Pokaż, że istnieje dokładnie jeden wachlarz zupełny Σ w N, którego promienie (stożki wymiaru 1) są generowane przez $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Rozmaitość $X(\Sigma)$ będziemy nazywać przestrzenią rzutową wymiaru n i oznaczać $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ lub $\mathbb{P}^n$.

(b) Przyjmując $x_i = \chi^{e_i^*}$, gdzie $e_1^*, \ldots, e_n^*$ jest bazą w M dualną do $e_1, \ldots, e_n$, pokaż toryczne afiniczne pokrycie $X(\Sigma)$ składające się z $n+1$ kopii $\mathbb{C}^n$ i znajdź wpółrzędne każdego z tych zbiorów w terminach x_i.

7. Niech $\widehat{N}$ będzie kratą z bazą $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$. Niech $\sigma^+ = \sum \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \hat{e}_i$ będzie "dodatnim" stożkiem w $\widehat{N}_{\mathbb{R}}$ i weźmy jego n-ty szkielet $\widehat{\Sigma} = \Sigma(\sigma^+)^n$. Niech (N, Σ) będzie wachlarzem z zadania poprzedniego.

   (a) Pokaż, że rozmaitość $X(\widehat{\Sigma})$ jest izomorficzna z $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ze standardowym działaniem $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$.

   (b) Pokaż, że homomorfizm $\widehat{N} \longrightarrow N$ taki, że $\hat{e}_i \mapsto e_i$ rozszerza się do bijektywnego odwzorowania wachlarzy $(\widehat{N}, \widehat{\Sigma}) \longrightarrow (N, \Sigma)$.

   (c) Pokaż, że powyższe odwzorowanie wachlarzy zadaje odwzorowanie rozmaitości torycznych, którego włókna (przeciwobrazy punktów) są liniami przechodzącymi przez 0 w $\mathbb{C}^{n+1}$.

   (d) Pokaż, że $\mathbb{P}^n$ jest zbiorem orbit działania na $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 1-parametrowej podgrupy $\lambda_{e_0+\cdots+e_n} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^{n+1}$.

8. Ważona przestrzeń rzutowa. Niech $(\widehat{N}, \widehat{\Sigma})$ będzie jak w zadaniu poprzednim. Weźmy ciąg dodatnich liczb całkowitych $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ i zdefiniujmy kratę N w przestrzeni ilorazowej $N_{\mathbb{R}} = \widehat{N}_{\mathbb{R}}/(\mathbb{R} \cdot \sum a_i \hat{e}_i)$, która jest obrazem $\widehat{N}$ przy odwzorowaniu ilorazowym $\widehat{N} \to N$; obrazy $\hat{e}_i$ oznaczmy przez e_i, czyli $\hat{e}_i \mapsto e_i$.

   (a) Pokaż, że istnieje dokładnie jeden zupełny wachlarz Σ w N w którym promienie sa generowane przez e_i, rozmaitość $X(\Sigma)$ w tym przypadku nazywamy przestrzenią rzutową z wagami $(a_0, \ldots, a_n)$ i oznaczamy $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$.

   (b) Opisz włókna odwzorowania $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ indukowanego przez odwzorowanie wachlarzy $(\widehat{N}, \widehat{\Sigma}) \longrightarrow (N, \Sigma)$.

(c) Pokaż, że dla każdego całkowitego $k > 0$ mamy $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n) = \mathbb{P}(ka_0, \ldots, ka_n)$; jak zinterpretować tę równość w terminach odwzorowania z $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$?

(d) Załóżmy, że $a_0, \ldots, a_n$ nie mają wspólnego dzielnika i ponadto niech d będzie wspólnym dzielnikiem $a_1, \ldots, a_n$. Pokaż, że $\mathbb{P}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \mathbb{P}(a_0, a_1/d, \ldots, a_n/d)$.

9. Niech $\sigma^+ = \sum \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_i$ będzie "dodatnim" stożkiem w w kracie N z bazą $e_1, \ldots, e_n$. Niech $\Sigma = \Sigma(\sigma^+)$ bedzie wachlarzem składającym się ze ścian σ^+. Rozpatrzmy podział barycentryczny σ^+: weźmy $e_0 = e_1 + \cdots + e_n$ i rozpatrzmy wachlarz $\widehat{\Sigma}$, o nośniku równym σ^+, którego stożki maksymalnego wymiaru są postaci $\sigma_i = \sum_{j \neq i} \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_i$, dla $i = 1, \ldots, n$.

   (a) Przyjmując $x_i = \chi^{e_i^*}$, gdzie $e_1^*, \ldots, e_n^*$ jest bazą w M dualną do $e_1, \ldots, e_n$, pokaż toryczne afiniczne pokrycie $X(\widehat{\Sigma})$ składające się z n kopii $\mathbb{C}^n$ i znajdź wpółrzędne każdego z tych zbiorów w terminach x_i.

   (b) Zapisz odwzorowanie $X(\widehat{\Sigma}) \longrightarrow X(\Sigma)$ w terminach współrzędnych x_i i znajdź jego włókna: pokaż że nad $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ jest to izomorfizm a włókno nad 0 jest izomorficzne z $\mathbb{P}^{n-1}$.